Application of the Finite Element Method in the Calculation of Shells of Revolution

A.N. Gurbanov, I.Z. Sardarova, L.A. Aliyeva

Azerbaijan State University of Oil and Industry (Azadlig ave. 16/21, Baku, AZ1010, Azerbaijan)

For correspondence:
Gurbanov Abdulaga / e-mail: qabdulaga@mail.ru

Abstract

The paper describes an algorithm for calculating structurally orthotropic shells of rotation with an arbitrary shape of the meridian and an arbitrary law of change in the rigidity of the shell along the meridian. In this case, a number of restrictions are imposed on the law of change in the shell stiffness. Under the action of an axisymmetric load on the shell, the method of dividing the shell into a system of curvilinear rods lying on elastic supports and an elastic foundation turned out to be effective. At the same time, the limitations inherent in these algorithms do not provide a solution to many problems of interest to a design engineer. In this regard, the finite element method, which was previously successfully applied in the study of unsupported shells, is promising.

Keywords: rotation shell, polynomial, finite elements, center of gravity, vertex elements, load vector, displacement vector.

DOI: 10.52171/2076-0515_2022_14_02_48_54

Received *02.08.2021*
Revised *18.06.2022*
Accepted *21.06.2022*

For citation:
Gurbanov A.N., Sardarova I.Z., Aliyeva L.A.
[Application of the finite element method in the calculation of shells of revolution]
Herald of the Azerbaijan Engineering Academy, 2022, vol. 14, no. 2, pp. 48-54 *(in Russian)*

Fırlanma üzlərinin hesablanmasında son elementlərin tətbiqi üsulu

Ə.N. Qurbanov, İ.Z. Sərdarova, L.A. Əliyeva
Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universiteti (Azadlıq pr. 16/21, Bakı, AZ1010, Azərbaycan)
Yazışma üçün:
Qurbanov Əbdulağa / e-mail: qabdulaga@ mail.ru

Xülasə
Məqalədə meridianın sərbəst forması və meridian boyunca qabığın sərtliyinin sərbəst dəyişməsi ilə konstruktiv-ortotrop fırlanma qabıqlarının hesablanması alqoritmi təsvir edilmişdir. Bununla yanaşı, qabığın sərtliyində dəyişiklik qanununa bir sıra məhdudiyyətlər qoyulur. Qabığa asimmetrik yük təsir edərkən möhkəm dayaqlarda və möhkəm əsasda yatan əyri xətti çubuqlar sisteminə qabığın parçalanmasının qəbulu səmərəli oldu. Eyni zamanda, bu alqoritmlərə xas məhdudiyyətlər layihə mühəndisi üçün maraq doğuran bir çox problemlərin həllini əldə etməyə imkan vermir. Bu baxımdan, son elementlərin tətbiqi metodu çox perspektivlidir, əvvəllər möhkəmləndirilməmiş qabıqların tədqiqində müvəffəqiyyətlə tətbiq olunub.

Açar sözlər: fırlanma, polinom, son elementlər, ağırlıq mərkəzi, zirvə elementləri, yüklər vektoru, hərəkət vektoru.

DOI: 10.52171/2076-0515_2022_14_02_48_54

УДК: 681.534.1

Применение метода конечных элементов при расчете оболочек вращения

А.Н. Гурбанов, И.З. Сардарова, Л.А. Алиева

Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности (пр. Азадлыг 16/21, Баку, AZ1010, Азербайджан)

Для переписки:
Гурбанов Абдулага / e-mail: qabdulaga@mail.ru

Аннотация
В работе описан алгоритм расчета конструктивно-ортотропных оболочек вращения с произвольной формой меридиана и произвольным законом изменения жесткости оболочки вдоль меридиана. При этом на закон изменения жесткости оболочки накладывается ряд ограничений. При действии на оболочку осесимметричной нагрузки эффективным оказался прием расчленения оболочки на систему криволинейных стержней, лежащих на упругих опорах и упругом основании. В то же время присущие этим алгоритмам ограничения не дают решения многих задач, представляющих интерес для инженера-проектировщика. В этом отношении перспективным является метод конечных элементов, который ранее был успешно применен при исследовании неподкрепленных оболочек.

Ключевые слова: оболочка вращения, полином, конечные элементы, центр тяжести, вершинные элементы, вектор нагрузок, вектор перемещений.

Введение

При расчете оболочка вращения разбивается на несколько криволинейных конечных элементов.

Каждый из элементов представляет собой оболочку вращения, вырезанную из исходной двумя плоскостями, перпендикулярными оси оболочки [1-3].

Обозначив через 2l длину элемента в направлении меридиана, совместим с серединой дуги координатную плоскость r, φ системы координат r, φ, Z, в которых будем задавать положение точки серединной поверхности оболочки [4].

Введя далее безразмерный параметр $\eta = \frac{S}{l}$, где S – длина дуги, отсчитываемая вдоль меридиана от середины точки, определим r и z через безразмерный параметр η.

Для этого будем задавать r полиномом четвертого порядка:

$$r = r_0 + r_{1\eta} + r_2\eta^2 + \eta_3^2 + r_4\eta_4, \tag{1}$$

в котором постоянные r_2 определяются из условий:

$$\left.\begin{array}{l} r = r_* \\ r' = r_*' \end{array}\right\} \quad \eta = \pm 1; r = r_*; \eta = 0 \tag{2}$$

где r_* и r_*' – точное значение радиуса и его первой производной по координате η на узловой $(\eta = \pm 1)$ или центральной $(\eta = 0)$.

При решении задачи устойчивости пластины с применением метода конечных элементов удобно идеализировать конструкцию в виде треугольного элемента. Этот элемент имеет двадцать степеней свободы и позволяет обеспечить в узлах непрерывность как поля перемещений, так и поля напряжений.

Постановка задачи

Опишем процедуру решения задачи с использованием такого элемента.

Обозначим через u и ϑ перемещения в направлении осей x и y для плосконапряженного элемента. В качестве неизвестных, подлежащих определению, примем перемещения и их первые производные в узловых точках по направлениям x и y и перемещения центра тяжести элемента u_c и ϑ_c [4-8].

Координаты центра тяжести x_c и y_c определяются по формулам:

$$x_c = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3);$$

$$y_c = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3);$$

Соответственно выбранному числу (независимых неизвестных узловых перемещений элемента) будем задавать поле перемещений внутри элемента полным кубическим полиномом:

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + $$
$$+ a_7 x^2 + a_8 x^2 y + a_9 xy^2 + a_{10} y^3;$$
$$\vartheta = a_{11} + a_{12} x + a_{13} y + a_{14} x^2 + a_{15} xy + $$
$$+ a_{16} y^2 + a_{17} x^3 + a_{18} x^2 y + a_{19} xy^2 + a_{20} y^3$$

При этом

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ u_y = \frac{\partial u}{\partial y},\ \vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial x},\ \vartheta_y = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}.$$

Методы решения

Соотношение между перемещениями в вершинах элемента и постоянными запишем в матричной форме в виде:

$$\{U_i\} = [M(x_i, y_i)]\{a\} \tag{3}$$

где $\{U_i\} = \begin{bmatrix} U \\ U_x \\ U_y \\ V \\ V_x \\ V_y \end{bmatrix}, \{a\} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_{19} \\ a_{20} \end{bmatrix},$

$$[M(x,y)] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2x & 3y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy^3 & y^2 \end{bmatrix}$$

Соответственно, полный вектор перемещений узлов

$$\{U_n\} = [A]\{a\}, \tag{4}$$

где

$$[U_n] = \begin{bmatrix} \{U_{1n}\} \\ \{U_{2n}\} \\ \{U_{3n}\} \\ \{U_{cn}\} \end{bmatrix}, \{U_{cn}\} = \begin{bmatrix} U_c \\ \vartheta_c \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} [M(x_1, y_1)] \\ [M(x_2, y_2)] \\ [M(x_3, y_3)] \\ [F(x_c, y_c)] \end{bmatrix}$$

Подматрица, используемая для определения вектора перемещений центра тяжести элемента, имеет следующую структуру:

$$[F(x_c, y_c)] = \begin{bmatrix} 1 & x_c & y_c & x^2 & x_cy_c & y_c^2 & x_c^3 & x_c^2y_c & x_c^2y & x_cy_c^2 & y_c^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_c & y_c & x_c^2 & x_cy_c & y_c^2 & x_c^3 & x_c^2y_c & x_c^2y_c & y_c^3 \end{bmatrix}$$

Матричное уравнение (4) позволяет выразить неопределенные коэффициенты a через перемещения узлов и центра тяжести

$$\{a\} = [A]^{-1}\{U_n\}, \tag{5}$$

Соответственно полный вектор перемещений в произвольной точке элемента

$$\{u\} = [M(x,y)][A]^{-1}\{U_n\}. \tag{6}$$

Выражения для компонент деформации и плосконапряженного элемента

$$E_x = \frac{\partial u}{\partial x}, E_y = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$$

Используя уравнение (6), матрицу деформаций можно записать в виде:

$$\{E\} = [B][A]^{-1}\{U_n\}, \{E\} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$[B]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2xy & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & 0 & 2xy & 3y^2 & 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Соотношение между деформациями и напряжениями

$$\{\sigma\}=[\chi]\{E\}, \tag{8}$$

где $[\chi]$ - матрица, имеющая следующую структуру:

$$[\chi]=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Окончательно с учетом выражения для деформации (7) матрица напряжений $\{\sigma\}=\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$ определяется уравнением:

$$\{\sigma\}=[\chi][B][A]^{-1}\{U_n\} \tag{9}$$

<u>Матрица жесткости элемента.</u> Для вывода матрицы жесткости элемента воспользуемся принципом равенства работы узловых сил на потенциальной энергии элемента:

$$\frac{1}{2}\{U_n\}^t[K]\{U_n\}=\frac{1}{2}\int_V\{\varepsilon\}^t\{\sigma\}dV, \tag{10}$$

где Ɛ – относительная деформация.

Интегрирование проводится по всему объему элемента. Подставляя в уравнение (10) выражения (7) и (8), получим выражения для усилий в узлах

$$\begin{aligned}\{s\}&=[K]\{U_n\}= \\ &=[A]^{-1t}\int_V[B]^t[\chi][B]dV[A]^{-1}\{U_n\},\end{aligned} \tag{11}$$

Отсюда матрица жесткости определится соотношением:

$$[K]=[A]^{-1t}\int_V[B]^t[\chi][B]dV[A]^{-1} \tag{12}$$

В общем случае

$dV=t(x,y)dxdy,$ где $t(x,y)$- толщина элемента.

<u>Преобразование матрицы жесткости.</u> Матрица жесткости может быть непосредственно применен для расчета конструкции, однако, поскольку центральные перемещения u_c и v_c не участвуют в сопряжении, целесообразно понизить размерность матрицы жесткости. Матрицы [к], {s} и {U} и условия равенства внешних сил во внутренних узлах можно записать в блочной форме следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \{S_v\} \\ \{S_c\} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [K_{vv}] & [K_{vc}] & [\{U_n\}] \\ [K_{cv}] & [K_{cc}] & [\{U_c\}] \end{bmatrix}, \tag{13}$$

где индексы ν и c относятся соответственно к перемещениям или силам в вершинах или центре. Из выражений (13) после перемножения блоков получим два матричных уравнения:

$$\{S_{\gamma v}\}=[K_{vv}]\{U_v\}+[K_{vc}]\{U_c\}; \tag{14}$$

$$\{S_c\}=[K_{cv}]\{U_v\}+[K_{cc}]\{U_c\}. \tag{15}$$

Исключив далее $\{U_c\}$ из уравнений (14) и (15), получим:

$$\{S_v\}-[K_{vc}]\{K_{cc}\}^{-1}\{S_c\}= \\ =\{[K_{vv}]-[K_{vv}][K_{cc}]^{-1}[K_{cv}]\}\{U_v\} \tag{16}$$

или

$$\{S_r\}=[\overline{K}]\{U_v\} \tag{17}$$

где

$$\{S_r\}=\{S_v\}-[K_{vc}][K_{cc}]^{-1}\{S_c\}, \\ [K]=[K_{vv}]-[K_{vc}][K_{cc}]^{-1}[K_{cv}] \tag{18}$$

Вектор эквивалентных нагрузок может быть выведен из принципа равенства виртуальных работ приложенных и узловых нагрузок.

Полагая, что {G}- матрица эквивалентной нагрузки, работу, совершенную узловыми силами {G}, на возможных перемещениях $\{\delta U_n\}$ можно записать в виде

$$\delta W_G=\{\delta U_n\}^t\{G\} \tag{19}$$

Полагаем далее, что

$$\{F\}=\begin{bmatrix} F_x \\ 0 \\ 0 \\ F_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

матрица-столбец приложенных объемных сил, запишем виртуальную работу этих сил на возможных перемещениях $\{\delta U_n\}$:

$$\delta W=\int_V \{\delta U(x,y)\}^t\{F\}dV \tag{20}$$

Учитывая полученное выше выражение (6), получаем

$$\delta W=\{\delta U_n\}^t([A]^{-1t}\int_V [M(x,y)]^t\{F\}dV) \tag{21}$$

Приравняв δW_g и δW из уравнений (19) и (21), найдем матрицу-столбец эквивалентных нагрузок:

$$\{G\}=[A]^{-1t}\int_S [M(x,y)^t\{F\}dV \tag{22}$$

Матрица-столбец эквивалентных нагрузок имеет размер 20x1.

Аналогично для вектора поверхностных сил:

$$\{P\}=[A]^{-1t}\int_S [M(x,y)^t\{L\}dS \tag{23}$$

Для сил, приложенных на границах элемента:

$$\{\psi\}=[A]^{-1t}\int_L [M(x,y)^t\{Q\}dL \tag{24}$$

где {Q} – матрица-столбец сил, приложенных на границе элемента, $\int_L$ означает интегрирование по контуру.

Поскольку при расчете конструкции вектор перемещений элемента $\{U_n\}$ заменяем вектором $\{U_v\}$, включающим только перемещения в узлах, векторы-столбцы приведенных нагрузок должны быть преобразованы к новому вектору по формулам:

$$\{G\}=\{G_v\}-[K_v][K_{cc}]^{-1}\{G_c\} \\ \{P_r\}=\{P_v\}-[K_{vc}][K_{cc}]^{-1}\{P_c\} \\ [\psi]=\{\psi_v\}-[K_{vc}][K_{cc}]^{-1}\{\psi_c\}$$

После того как определены матрицы жесткости $[k_g]=[k_1][k_2]\dots[k_s]$, чтобы получить матрицу жесткостей [k] для полной идеализированной конструкции, целесообразно использовать следующее преобразование: $[k]=[a]^t[\widetilde{k}][a]$

где [a] – матрица, выражающая соотношение между независимыми перемещениями, соответствующими кинетическим степеням свободы отдельных элементов (узловыми перемещениями) и независимыми перемещениями, принятыми для конструкции. Подматрицы $[a_g]$ матрицы [a] формируются так, чтобы выполнялось условие: $\{U_g\}=[a_g]\{U\}$

Заключение

Предложенный подход позволяет включать геометрические данные элемента в матрицу $[к_g]$, а матрица [a] содержит информацию, указывающую, по какому адресу необходимо доставить элементы подматрицы $[к_g]$ при формировании матрицы [a]. Данный способ идентичен в принципе способу сложения коэффициентов жесткости, но более удобен для реализации на ПК.

REFERENCES

1. **Edelen D.G.B.** On a closure of the governing equations of defect mechanics and the resulting theory of the plastic state. *Int. J. Eng. Sci*. 1979. Vol.17. Pp. 441-464 *(in English)*
2. **Engheta N., Ziolkovski R.** (ads). Metamaterials: Physics and Engineering Explorations, N.-Y.: *John Wiley and Sons,* 2006 *(in English)*
3. **Hümbətov R.T., İbrahimov B.Q., İbrahimov R.F.** Telekomunikasiya sistemlərində öturulən informasiyanın bir kriptoqrqfik muhafizə üsulu haqqında. *Azərbaycan Mühəndislik Akademiyasının Xəbərləri*, № 2. 2018. C. 72-79 *(in Azerbaijani)*
4. **Green A., Adkins D.** Large elastic informations and nonlinear mechanics of a continues medium, Moscow: *Peace,* 1965, 455 p. *(in English)*
5. **Hao Y., Mitra R.Y.** FTTD Modeling of Metamaterials. Theory and Applications. *Artech House Publishers*, 2009. 379 p. *(in English)*
6. **Gurbanov A.N.** Razrabotka matematicheskih modelej osushki prirodnogo gaza pri podgotovke k transportu. *Vestnik Azerbajdzhanskoj inzhenernoj akademii*. 2014, T. 6, № 2, s. 89-96 *(in Russian)*
7. **Martyanova G.V.** Variation method for calculating rubber-metal elastic elements by the determination of integral and normal loads, İnternational Conference on plastics and rubber. Pre-printed reports, Section W.T.I. Kiev, 1978, 12 p. *(in English)*
8. **Yoshida S.** Consideration on fracture of solid-state materials. Phys. lett. A.200. Vol.270. Pp. 320-325 *(in English)*