

UDC 622.44.45

DOI 10.52171/2076-0515\_2024\_16\_02\_34\_54

## **The Study of the Stress-Strain State of the Downhole Packer's Jaw Teeth Based on the Initial Functions Method**

**A.Kh. Janahmadov<sup>1</sup>, O.A. Dyshin<sup>2</sup>, M.A. Shahnazarov<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> *Azerbaijan National Aviation Academy (Mardakan Ave. 30, Baku, AZ1045, Azerbaijan)*

<sup>2</sup> *Scientific-Research Institute of Geotechnological Problems of Oil and Gas and Chemistry (Azadlig ave. 20, Baku, AZ1010, Azerbaijan)*

<sup>3</sup> *State Agency for Safe Working in Industry and Mountain-Mine Control (N. Rafiyev str. 66, Baku, AZ1025, Azerbaijan)*

### **For correspondence:**

Shahnazarov Mohsun / e-mail: mohsunsh@gmail.com

### **Abstract**

Based on the application of the method of initial functions using a decomposition approach with the division of the problem into two subtasks with the same type of load at the edges, calculation formulas for displacements and stresses in polar coordinates are obtained. The solutions of these problems are constructed in elementary (polynomial-exponential) functions in the form of a general solution of an inhomogeneous differential equation with the right side, depending on the intensity of the load along the edges of the wedge with unsupported or reinforced edges. The solution of the problem obtained by the operational method using the one-sided Laplace transform depends on the uncertain coefficients of the expansion of the general solution of the corresponding homogeneous differential equation in terms of linearly independent equations determined by the roots of the characteristic equation. For each of the problems under consideration, a method is indicated for identifying these uncertain coefficients in the presence of a load along the edges of the wedge, both in the presence and absence of a higher force applied to the top.

**Keywords:** packer, stress-strain state, method of initial functions, operational calculation, one-sided Laplace transform, decomposition approach, stress-strain diagram, differential equation of infinitely high order.

**Received** 12.09.2023

**Revised** 12.06.2024

**Accepted** 21.06.2024

### **For citation:**

*A.Kh. Janahmadov, O.A. Dyshin, M.A. Shahnazarov*

[The Study of the Stress-Strain State of the Downhole Packer's Jaw Teeth Based on the Initial Functions Method]

*Herald of the Azerbaijan Engineering Academy, 2024, vol. 16, № 2, pp. 34-54 (in Russian)*

## İbtidai funksiyalar metodu əsasında quyudaxili pakerin plaşkasının dişlərinin gərginlik-deformasiya vəziyyətinin tədqiqi

Ə.X. Cənəhmədov<sup>1</sup>, O.A. Dışın<sup>2</sup>, M.Ə. Şahnazarov<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Azərbaycan Milli Aviasiya Akademiyası (Mərdəkan pr. 30, Bakı, AZ1045, Azərbaycan)

<sup>2</sup> Neftin, Qazın Geotexnoloji Problemləri və Kimya Elmi-Tədqiqat İnstitutu (Azadlıq pr. 20, Bakı, AZ1010, Azərbaycan)

<sup>3</sup> Sənayedə İşlərin Təhlükəsiz Görülməsi və Dağ-mədən Nəzarəti Dövlət Agentliyi (N.Rəfiyev küç. 66, Bakı, AZ1025, Azərbaycan)

### Xülasə

Məsələnin, kənarlar boyunca eyni tipli yük ilə iki alt məsələyə bölünməsi ilə dekompozisiya yanaşmasından istifadə edərək ibtidai funksiyalar metodunun tətbiqi əsasında qütb koordinatlarında yerdəyişmələr və gərginliklər üçün hesablama düsturları alınır. Bu məsələlərin həlləri bərkidilməmiş və ya bərkidilmiş tilləri olan pazın kənarları boyunca yükün intensivliyindən asılı olaraq sağ tərəfi olan qeyri-homogen differensial tənliyin ümumi həlli şəklində elementar (polinom-eksponensial) funksiyalarda qurulur. Birtərəfli Laplas çevrilməsindən istifadə etməklə əməliyyat üsulu ilə alınan məsələnin həlli xarakterik tənliyin kökləri ilə təyin olunan xətti müstəqil həllər baxımından müvafiq bircins differensial tənliyin ümumi həllinin genişləndirilməsinin qeyri-müəyyən əmsallarından asılıdır. Baxılan məsələlərin hər biri üçün pazın kənarları boyunca yük olduqda, həm yuxarıya tətbiq olunan xarici qüvvənin mövcudluğunda, həm də yük olmadıqda bu qeyri-müəyyən əmsalları müəyyən etmək üçün bir üsul göstərilir.

**Açar sözlər:** paker, gərginlik-deformasiya vəziyyəti, ibtidai funksiyalar üsulu, əməliyyat hesabı, birtərəfli Laplas çevrilməsi, dekompozisiya yanaşması, gərginlik-deformasiya diaqramı, sonsuz yüksək tərtibli diferensial tənlik.

## Исследование напряженно-деформированного состояния зубьев плашки внутрискважинного пакера на основе метода начальных функций

А.Х. Джанахмедов<sup>1</sup>, О.А. Дышин<sup>2</sup>, М.А. Шахназаров<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Азербайджанская Национальная академия авиации (пр. Мардакан, 30, Баку, AZ1045, Азербайджан)

<sup>2</sup> НИИ «Геотехнологические проблемы нефти, газа и химия» (пр. Азадлыг, 20, Баку, AZ1010, Азербайджан)

<sup>3</sup> Государственное Агентство по безопасному ведению промышленных работ и горнопромысловому надзору (ул. Н. Рафиев, 66, Баку, AZ1025, Азербайджан)

### Аннотация

На основе применения метода начальных функций с использованием декомпозиционного подхода с разделением поставленной задачи на две подзадачи с одним и тем же типом нагрузки по краям, получены расчетные формулы для перемещений и напряжений в полярных координатах. Решения этих задач построены в элементарных (полиномиально-экспоненциальных) функциях в виде общего решения неоднородного дифференциального уравнения с правой частью, зависящей от интенсивности нагрузки по краям клина с неподкрепленными или подкрепленными ребрами. Полученное операционным методом с применением одностороннего преобразования Лапласа решение задачи зависит от неопределенных коэффициентов разложения общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения по линейно независимым решениям, определяемым корнями характеристического уравнения. Для каждой из рассматриваемых задач указан способ идентификации этих неопределенных коэффициентов при наличии нагрузки по краям клина как в присутствии, так и отсутствии внешней силы, приложенной к вершине.

**Ключевые слова:** пакерование, напряженно-деформированное состояние (НДС), метод начальных функций, операционное исчисление, одностороннее преобразование Лапласа, декомпозиционный подход, диаграмма «напряжения-деформация», дифференциальное уравнение бесконечно высокого порядка.

## Введение

В отличие от теории сопротивления материалов, которая при раскрытии статически неопределимого напряженного состояния тела прибегает к различным дополнительным гипотезам в зависимости от формы тел, теория упругости раскрывает эту неопределимость без каких-либо дополнительных допущений, кроме общих с сопротивлением материалов допущений, касающихся свойств упругого твердого тела. Если объектом изучения в курсе сопротивления материалов является стержень или система стержней, то в теории упругости рассматривается тело любой конфигурации и в общем случае – тело трех измерений [1-4].

Во всех типах пакеров, используемых для целей разобщения пластов и герметизации эксплуатационной колонны труб от воздействия среды в процессе эксплуатации нефтяных, газовых и нагнетательных скважин, герметизация осуществляется резиновыми упругими элементами, упором для сжатия которых служит пласечный узел [5-6]. Независимо от конструктивного исполнения, принцип работы пласечного узла остается одинаковым: конус надвигается на плашки или, наоборот, упираясь в стенку эксплуатационной колонны, плашки создают упор с помощью зубьев, врезающихся в поверхность колонны. После чего при передаче сжимающей нагрузки плашки, удерживая эту нагрузку, они способствуют сжатию резинового упругого элемента.

Зубья плашек, врезаясь в стенку эксплуатационной колонны (что, необходимо для сцепления), инициируют неравномерное напряжение, приводящее к деформированному состоянию в теле зубьев клинье-

вых захватных устройств и, в результате, к повреждению колонны [7-9]. Сложно-напряженное состояние, возникающее в зубьях, отрицательно влияет на работоспособность плашки, что в итоге приводит к излому плашки и нарушению герметичности пакера. Повреждение колонны, а также и нарушение герметичности, крайне нежелательно, поскольку их восстановление и замена требует дополнительных работ, времени и затрат [10].

Для плоских задач линейной теории упругости в прямоугольной декартовой системе координат  $oxy$  в методе начальных функций (МНФ) решение строится в виде линейных комбинаций начальных функций, определенных на одной из координатных линий  $x = 0$  или  $y = 0$  [11-13]. При выборе в качестве начальных функций тригонометрических функций их коэффициентами пропорциональности являются степенные ряды по второй независимой координате. Сходимость этих степенных рядов в случае изотропного тела исследована в работе [11]. Для ортотропного тела при задании начальных функций на линии  $y = 0$  и при условии, что координатные линии совпадают с главными направлениями упругости ортотропного материала, их суммы вычислены в [14]. В обоих случаях они представляются в виде комбинаций гиперболо-тригонометрических функций. Полученная при этом замкнутая форма коэффициентов пропорциональности этих функций показывает, что в данных случаях степенные ряды сходятся на всей вещественной оси. В более общем случае материала с произвольной анизотропностью, включающем в себя и случай несовпадения координатных линий с главными направлениями упругости ортотропного материала

ла, сходимость степенных рядов МНФ показана в работе [15].

Решение задачи изгиба при действии на (прямоугольную или клиновидную) пластину произвольной нагрузки определяется с разделением на симметричное и обратно симметричное состояния равновесия относительно линии симметрии пластины.

**Цель работы** – анализ основных механических характеристик сложнонапряженного состояния зубьев плашки внутрискважинного пакера под действием нормальной и касательной нагрузок по краям зуба плашки и воздействием приложенных к вершине зуба плашки поперечных и продольных (с растяжением или сжатием) сил и изгибающих моментов.

### **Постановка задачи**

Во время нагружения зубьев плашки пакера свободными грузами с одного края ( $\varphi = \varphi_a$ ), другой край ( $\varphi = -\varphi_a$ ) остается свободным от нагрузок. Будем полагать, что каждый из зубьев представляет собой тонкую клиновидную пластину с подкрепленными (каким-либо покрытием) ребрами, находящуюся под действием нормальной и касательной нагрузок с интенсивностями  $q$  и  $p$ , соответственно, причем нагрузки приложены к контуру пластины и действуют в ее плоскости. Считается, что ребра работают на растяжение – сжатие и на изгиб в плоскости пластины. Одностороннее нагружение удобнее представлять, как сумму двух типов нагружений, одно из которых симметрично, другое – обратно симметрично относительно продольной плоскости симметрии, неподкрепленной или подкрепленной ребрами по краям пластины. Это означает, что если один фикси-

рованный край пластины (например,  $\varphi = \varphi_a$ ) в исходной задаче нагружен нормальной и касательной нагрузками  $q$  и  $p$  в определенных направлениях (например, соответственно, по внешней нормали к ребру и по касательной в направлении от вершины), то в первом типе нагружения на обоих краях  $\varphi = \pm\varphi_a$  нагрузки имеют симметричные направления, при этом нормальные и касательные нагрузки имеют соответственно интенсивности  $\frac{q}{2}$  и  $\frac{p}{2}$  и те же направления, как на фиксированном крае в исходной задаче (задачу такого типа называют симметричной), а во втором типе нагружения нормальные и касательные нагрузки на обоих краях имеют интенсивности  $\frac{q}{2}$  и  $\frac{p}{2}$ , соответственно, и обратно симметричные направления, причем на фиксированном крае направления нагрузок совпадают с направлениями нагрузок в исходной задаче (такую задачу называют обратно симметричной). Для решения будет использован метод начальных функций [11], позволяющий получить решение задач теории упругости в случае сложнонапряженного состояния прямоугольных и клиновидных пластин с учетом распределения поперечных и продольных (на растяжение-сжатие) сил и изгибов клина изгибающими моментами, с установлением зависимости перемещений и напряжений клина от интенсивностей приложенных нормальной и касательной нагрузок. Наибольший эффект для численного решения поставленной задачи дает сочетание метода начальных функций с операционным методом вычисления явных выражений разрешающих функций, определяемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициен-

тами, правая часть которых зависит от приложенных нагрузок.

Поскольку разрешающую функцию, используемую для вычисления начальных функций, можно определить только для одного вида нагрузки (нормальной или касательной), будет применен декомпозиционный подход, разбивающий исходную задачу с одновременным заданием обоих указанных видов нагрузки (назовём её задачей А) на следующие задачи, каждая из которых зависит только от одного вида нагрузки  $q$  или  $p$  симметрично направленной и по обоим краям:  $A_{\bar{q}}(A_{\bar{p}})$  и  $A_q(A_p)$  с одной и той же нагрузкой  $q$  или  $p$  по обоим краям, направленными симметрично и обратно симметрично. В случае обратно симметричных задач, наряду с задачей  $A_{\bar{q}}$  при отсутствии внешних сил, будут рассмотрены: задача на изгиб с сосредоточенной продольной силой  $Q$ , приложенной к вершине (задача  $A_{\bar{q},Q}$ ) и задача на изгиб с изгибающим моментом  $M$ , приложенным к его вершине (задача  $A_{\bar{q},M}$ ).

### Решение обратно-симметричных задач

Рассмотрим клиновидную пластину постоянной толщины  $\delta$  с подкрепленными ( $a>0$ ) или неподкрепленными ( $a=0$ ) ребрами по краям  $\varphi = \pm\varphi_a$ , симметричными относительно плоскости, проходящей через ось симметрии пластины. Будем считать, что пластина по краям  $\varphi = \pm\varphi_a$  нагружена нормальной и касательной к краям нагрузками, приложенными к ней обратно симметрично относительно плоскости симметрии пластины  $\varphi = 0$  с интенсивностями  $\frac{1}{2}q$  и  $\frac{1}{2}p$  соответственно. Принимаем, что при подкреплении ребра жесткости работают

только на растяжение-сжатие и что площади их поперечных сечений изменяются пропорционально координате  $r$  с коэффициентом пропорциональности  $f_0$ :

$$f = f_0 \cdot r \quad (1)$$

Дифференциальное уравнение равновесия для элемента ребра клиновидной полосы (балка) записывается в виде

$$\frac{d}{dr}(rf_0\sigma_r^*) \approx \delta\tau_{r\varphi} - \frac{1}{2}p, \quad (2)$$

где  $\sigma_r^*$  - нормальное напряжение в ребре;  $\tau_{r\varphi}$  - касательное напряжение в пластине на границе с ребром,  $\delta$  - толщина клиновидной пластины.

$$\sigma_r^* = E_1 \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{\varphi=\varphi_a}, \quad (3)$$

где  $E_1$  - модуль упругости на растяжение (модуль Юнга) материала ребра. С учетом зависимости (3) переменная  $R$  в обозначениях

$$U = Gu, R = r\tau_{r\varphi}, r = e^s, s = \ln r, \quad (4)$$

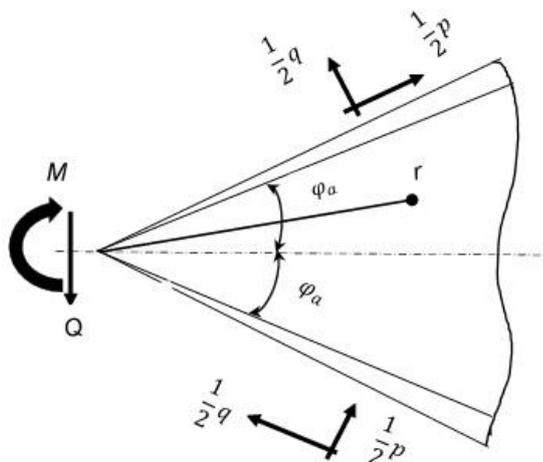
запишется как

$$R = 2(1 + \nu)\alpha a^2 U + \frac{1}{2}pe^s, \quad (5)$$

где  $a = \frac{E_1 f_0}{E\delta}$ ,  $\alpha^2 = \frac{\partial^2}{\partial s^2}$ ,  $G$  - модуль сдвига;  $E$  - модуль Юнга основного материала пластины,  $u$  - перемещение по направлению координатной линии  $r$ .

Рассчитаем изгиб вышеуказанной пластины под воздействием приложенной к ее вершине вертикальной (поперечной) сосредоточенной силы  $Q$  или изгибающего момента  $M$  (рис.1 [11]).

Термин “обратно симметричная”, по определению [16], означает, что в рассматриваемой здесь задаче имеется плоскость, проходящая через ось симметрии пластины, по отношению к которой распределение напряжений по одну и другую сторону является именно обратно симметричным.



**Рисунок 1** – Клиновидная пластина с подкрепленными двумя одинаковыми ребрами, нагруженная нормальной и касательной к краям нагрузками, приложенными к ней обратно симметрично, и находящаяся под действием поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$

**Figure 1** – A wedge-shaped plate with two supported identical edges, loaded with normal and tangential loads applied to it in a reverse symmetrical manner, and under the action of a transverse force  $Q$  and a bending moment  $M$

В обратно-симметричной задаче  $A_{\bar{q}}$  полагается  $U_0(s) = 0$ ,  $\Phi_0(s) = 0$  и НДС клина описывается начальными функциями  $V_0(s)$  и  $R_0(s)$ , определяемыми следующей системой дифференциальных уравнений [11]:

$$\begin{cases} [L_{RV}(\alpha, \varphi_a) - 2(1 + \nu)\alpha\alpha^2 L_{UV}(\alpha, \varphi_a)]V_0(s) + \\ + [L_{RR}(\alpha, \varphi_a) - 2(1 + \nu)\alpha\alpha^2 L_{UR}(\alpha, \varphi_a)]R_0(s) = \frac{1}{2} \frac{p}{\delta} e^s \\ L_{\phi V}(\alpha, \varphi_a)V_0(s) + L_{\phi R}(\alpha, \varphi_a)R_0(s) = \frac{1}{2} \frac{q}{\delta} e^s \end{cases} \quad (6)$$

с коэффициентами, определяемыми формулами

$$\begin{aligned} L_{UV}(\alpha, \varphi) &= \frac{1}{4} \{ (1 + \nu)(1 - \alpha) \sin(1 + \alpha)\varphi - [(1 + \nu)\alpha - 3 + \nu] \sin(1 - \alpha)\varphi \}; \\ L_{UR}(\alpha, \varphi) &= \frac{1}{8\alpha} \{ [3 - \nu + (1 + \nu)\alpha] \sin(1 + \alpha)\varphi + [(1 + \nu)\alpha - 3 + \nu] \sin(1 - \alpha)\varphi \}; \\ L_{RV}(\alpha, \varphi) &= \frac{1}{2} (1 + \nu)\alpha(1 - \alpha) [\cos(1 + \alpha)\varphi - \cos(1 - \alpha)\varphi]; \\ L_{RR}(\alpha, \varphi) &= \frac{1}{4} \{ [3 - \nu + (1 + \nu)\alpha] \cos(1 + \alpha)\varphi + (1 + \nu)(1 - \alpha) \cos(1 - \alpha)\varphi \}; \\ L_{\phi V}(\alpha, \varphi) &= \frac{1}{2} (1 + \nu)\alpha [-(1 - \alpha) \sin(1 + \alpha)\varphi + (1 + \alpha) \sin(1 - \alpha)\varphi]; \\ L_{\phi R}(\alpha, \varphi) &= \frac{1}{4} \{ -[3 - \nu + (1 + \nu)\alpha] \sin(1 + \alpha)\varphi - (1 + \nu)(1 - \alpha) \sin(1 - \alpha)\varphi \}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\alpha[f(s)] = \frac{d}{ds} f(s)$  и  $\frac{1}{\alpha}[f(s)] = \int f(s) ds$

Определим начальные функции  $V_0(s)$  и  $R_0(s)$  по формулам

$$\begin{cases} V_0(s) = [L_{RR}(\alpha, \varphi_a) - 2(1 + \nu)\alpha\alpha^2 L_{UR}(\alpha, \varphi_a)]F(s); \\ R_0(s) = - [L_{RV}(\alpha, \varphi_a) - 2(1 + \nu)\alpha\alpha^2 L_{UV}(\alpha, \varphi_a)]F(s), \end{cases} \quad (8)$$

где  $F(s)$  – разрешающая функция задачи  $A_{\bar{q}}$ . Соотношения (8) получаются из первого уравнения в (6) при  $p=0$ .

С учетом выражений для  $R(\alpha, \varphi)$  и  $U(\alpha, \varphi)$ , определяемых формулами [11]

$$\begin{aligned} R(\alpha, \varphi) &= L_{RU}(\alpha, \varphi) \cdot U_0(s) + L_{RV}(\alpha, \varphi)V_0(s) + L_{R\phi}(\alpha, \varphi)\Phi_0(s) + L_{RR}(\alpha, \varphi)R_0(s); \\ U(\alpha, \varphi) &= L_{UU}(\alpha, \varphi) \cdot U_0(s) + L_{UV}(\alpha, \varphi)V_0(s) + L_{U\phi}(\alpha, \varphi)\Phi_0(s) + L_{UR}(\alpha, \varphi)R_0(s), \end{aligned} \quad (9)$$

при  $\varphi = \varphi_a$  из (5) следует равенство

$$\begin{aligned}
 & [L_{RU}(\alpha, \varphi_a) - 2(1 + \nu)a\alpha^2 L_{UR}(\alpha, \varphi_a)]U_0(s) + \\
 & + [L_{RV}(\alpha, \varphi_a) - 2(1 + \nu)a\alpha^2 L_{UV}(\alpha, \varphi)]V_0(s) + \\
 & + [L_{R\phi}(\alpha, \varphi_a) - 2(1 + \nu)a\alpha^2 L_{U\phi}(\alpha, \varphi)]\Phi_0(s) + \\
 & + [L_{RR}(\alpha, \varphi_a) - 2(1 + \nu)a\alpha^2 L_{UR}(\alpha, \varphi)]R_0(s) = \frac{p}{2\delta} e^s
 \end{aligned} \tag{10}$$

При  $p=0$  и дополнительном условии

$$U_0(s) = 0, \Phi_0(s) = 0 \tag{11}$$

из уравнения (10) в силу (8) следует выполнение первого равенства в (6), а из второго равенства в (6) получается дифференциальное уравнение относительно функции  $F(s)$ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}(1 + \nu)\alpha[-(1 - \alpha)\sin(1 + \alpha)\varphi_a + (1 + \alpha)\sin(1 - \alpha)\varphi_a] \left\{ \frac{1}{4}\{[3 - \nu + \right. \\
 & (1 + \nu)\alpha]\cos(1 + \alpha)\varphi_a + (1 + \nu)(1 - \alpha)\cos(1 - \alpha)\varphi_a\} - (1 + \nu)a\frac{\alpha}{4}\{[3 - \nu + \\
 & (1 + \nu)\alpha]\sin(1 + \alpha)\varphi_a + [(1 + \nu)\alpha - 3 + \nu]\sin(1 - \alpha)\varphi_a\} + \frac{1}{4}\{-[3 - \nu + \\
 & (1 + \nu)\alpha]\sin(1 - \alpha)\varphi_a - (1 + \nu)(1 + \alpha)\sin(1 - \alpha)\varphi_a\} \cdot \left. \frac{1}{2}(1 + \nu)\alpha(1 - \right. \\
 & \left. \alpha)[\cos(1 + \alpha)\varphi_a - \cos(1 - \alpha)\varphi_a] - 2(1 + \nu)a\frac{\alpha^2}{4}\{(1 + \nu)(1 - \alpha)\sin(1 + \alpha) - \right. \\
 & \left. [(1 + \nu)\alpha - 3 + \nu]\sin(1 - \alpha)\varphi_a\} \right\} F(s) = \frac{q}{2\delta} e^s,
 \end{aligned} \tag{12}$$

которое сводится к следующему дифференциальному уравнению с  $\alpha = \frac{d}{ds}$  [11]:

$$[\alpha \sin 2\varphi_a - \sin 2\alpha\varphi_a - 4a\alpha \sin(1 - \alpha)\varphi_a \sin(1 + \alpha)\varphi_a] \alpha F(s) = \frac{1}{1 + \nu} \frac{q}{\delta} e^s \tag{13}$$

С учетом разложения тригонометрических функций из уравнения (13) в степенной ряд по параметру  $\alpha$ , оно является дифференциальным уравнением бесконечного порядка и после замены  $\alpha$  на комплексный параметр  $\lambda$  запишется в виде следующего трансцендентного уравнения от  $\lambda$ :

$$[\lambda \sin 2\varphi_a - \sin 2\lambda\varphi_a - 4a\lambda \sin(1 - \lambda)\varphi_a \sin(1 + \lambda)\varphi_a] \lambda = 0, \tag{14}$$

которое помимо бесконечного множества комплексных корней содержит также четыре вещественных корня, два из которых нулевые, а третий и четвертый равняются  $\pm 1$ .

Будем искать разрешающую функцию  $F(s)$  в классе элементарных (т.е. выраженных в элементарных функциях) решений дифференциального уравнения (13) для которого характеристическое уравнение (14) имеет только четыре корня  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = +1$  и  $\lambda_4 = -1$ . Тогда уравнение (14) можно записать в виде алгебраического уравнения

$$\varphi(\lambda) \equiv (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4) = 0$$

а уравнение (13) в виде

$$(\alpha^4 - \alpha^2)F(s) = \frac{q}{\delta(1 + \nu)} e^s \tag{15}$$

В операционном исчислении на основе одностороннего преобразования Лапласа  $L[f(t)] \equiv \bar{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt$  функцию  $\bar{f}(\lambda)$  от комплексной переменной  $\lambda$  называют изображением, а функцию  $f(t)$ , удовлетворяющую условию

$$|f(t)| < C e^{\sigma_0 t}, t > 0,$$

где  $\sigma_0 > 0$  и  $C > 0$  – константы, называют оригиналом [17]. Интеграл, определяющий функцию  $f(\lambda)$  (интеграл Лапласа), абсолютно сходится при  $\sigma > \sigma_0$ . Соответствие между  $\bar{f}(\lambda)$  и  $f(t)$  записывают в виде  $f(t) \rightarrow \bar{f}(\lambda)$  (прямое преобразование Лапласа) и  $\bar{f}(\lambda) \rightarrow f(t)$  (обратное преобразование Лапласа). В случае разрешающей функции роль переменной  $t$  играет  $s$ , при этом  $f(t) = F(s)$  и  $\bar{f}(\lambda) = \bar{F}(\lambda)$ .

С целью применения к уравнению (15) преобразования  $L[F(s)]$  заменим переменную  $s = \ln r$ , где  $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ ,  $r_{min} = r_0 > 0$ , новой переменной

$$\tilde{s} = s - s_0, s_0 = \ln r_0 \quad (16)$$

и положим, что функция  $\tilde{F}(\tilde{s}) = \eta(\tilde{s}) \cdot F(s)|_{s=\tilde{s}+s_0} \cdot e^{-s_0}$  является оригиналом по переменной  $\tilde{s}$ ;  $\eta(\tilde{s})$  – функция Хевисайда  $\eta(\tilde{s}) = 1$  при  $\tilde{s} > 0$  и  $\eta(\tilde{s}) = 0$  при  $\tilde{s} \leq 0$ .

Тогда уравнение (15) запишется в виде

$$(\alpha^4 - \alpha^2)\tilde{F}(\tilde{s}) = \frac{q}{\delta(1+\nu)} e^{\tilde{s}} \quad (17)$$

Поскольку  $\alpha = \frac{d}{ds} = \frac{d}{d\tilde{s}}$ , можно считать, что в характеристическом уравнении (14)

число  $\lambda$  соответствует оператору дифференцирование  $\alpha = \frac{d}{d\tilde{s}}$ .

Будем полагать, что при любом  $\tilde{s} > 0$  (т.е. при  $r > r_0$ ) функция  $\tilde{F}(\tilde{s})$  и производные  $\tilde{F}^{(k)}(\tilde{s})$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) являются оригиналами. Применяя к уравнению (17) преобразование  $L[\tilde{F}(\tilde{s})]$ , с учётом правила дифференцирования оригинала

$$L[f^{(n)}(t)] = \lambda^n L[f(t)] - \lambda^{n-1} f(0) - \lambda^{n-2} f'(0) - \dots - \lambda^{n-k-1} f^{(k)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

получим следующее уравнение в изображениях, соответствующее уравнению (17):

$$(\lambda^4 - \lambda^2)\bar{\tilde{F}}(\lambda) = \frac{q}{\delta(1+\nu)} \frac{1}{\lambda-1} + \lambda^2 C_{\tilde{F}^{(1)}} + \lambda C_{\tilde{F}^{(2)}} + (C_{\tilde{F}^{(1)}} - C_{\tilde{F}^{(3)}}) \quad (18)$$

где  $\bar{\tilde{F}}$  и  $\frac{1}{\lambda-1}$  – изображения по Лапласу для функций  $\tilde{F}(\tilde{s})$  и  $e^{\tilde{s}}$ ;  $C_{\tilde{F}^{(k)}}$  – значение при  $\tilde{s} = 0$  производной  $\tilde{F}^{(k)}(\tilde{s})$ ;

Разделив обе части уравнения (18) на  $\lambda^4 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 1)$ , получим

$$\begin{aligned} \bar{\tilde{F}}(\lambda) &= \frac{1}{\lambda^2(\lambda^2 - 1)} \frac{1}{\lambda - 1} \frac{q}{\delta(1 + \nu)} + \frac{\lambda}{\lambda - 1} + \frac{1}{\lambda^2 - 1} C_{\tilde{F}^{(1)}} + \\ &+ \frac{1}{\lambda(\lambda^2 - 1)} C_{\tilde{F}^{(2)}} + \frac{1}{\lambda^2(\lambda^2 - 1)} (C_{\tilde{F}^{(1)}} - C_{\tilde{F}^{(3)}}) \end{aligned} \quad (19)$$

Разлагая рациональные дроби в правой части (19) на простые дроби с помощью метода неопределенных коэффициентов, получим

$$\begin{aligned} \bar{\tilde{F}}(\lambda) &= \left[ -C_{\tilde{F}^{(2)}} + \frac{q}{\delta(1 + \nu)} \right] \cdot \frac{1}{\lambda} + \left( C_{\tilde{F}^{(3)}} - C_{\tilde{F}^{(1)}} + \frac{q}{\delta(1 + \nu)} \right) \cdot \frac{1}{\lambda^2} + \\ &+ \left[ (C_{\tilde{F}^{(2)}} + C_{\tilde{F}^{(3)}} - C_{\tilde{F}^{(1)}}) - \frac{5}{4} \frac{q}{\delta(1 + \nu)} \right] \cdot \frac{1}{\lambda - 1} + \\ &+ \left[ \frac{1}{5} (C_{\tilde{F}^{(2)}} + C_{\tilde{F}^{(1)}} - 2C_{\tilde{F}^{(3)}}) + \frac{1}{4} \frac{q}{\delta(1 + \nu)} \right] \cdot \frac{1}{\lambda + 1} - \frac{q}{\delta(1 + \nu)} \cdot \frac{1}{(\lambda - 1)^2}, \end{aligned}$$

что соответствует оригиналу

$$\tilde{F}(\tilde{s}) = -C_{\tilde{F}^{(2)}} + \frac{q}{\delta(1 + \nu)} + \left( C_{\tilde{F}^{(1)}} - C_{\tilde{F}^{(3)}} + \frac{q}{\delta(1 + \nu)} \right) \cdot \tilde{s} + \quad (20)$$

$$+ \left[ \frac{1}{2} (C_{\bar{F}(2)} + C_{\bar{F}(3)} - C_{\bar{F}(1)}) - \frac{5}{4} \frac{q}{\delta(1+\nu)} \right] \cdot e^{\bar{s}} +$$

$$+ \left[ \frac{1}{2} (C_{\bar{F}(2)} + C_{\bar{F}(1)} - 2C_{\bar{F}(3)}) + \frac{1}{4} \frac{q}{\delta(1+\nu)} \right] \cdot e^{\bar{s}} - \frac{q}{\delta(1+\nu)} \cdot \bar{s} e^{\bar{s}}$$

Для того чтобы получить выражения для начальных функций  $\bar{V}_0(\bar{s}) = V_0(s)|_{s=\bar{s}+s_0}$  и  $\bar{R}_0(\bar{s}) = R_0(s)|_{s=\bar{s}+s_0}$  в элементарных функциях, умножив обе части уравнения (18) на  $(\lambda - 1)$ , приходим к следующему уравнению, эквивалентному уравнению (18):

$$(\lambda^4 - \lambda^2)(\lambda - 1)\bar{F}(\lambda) = \frac{q}{\delta(1+\nu)} + \lambda^2(\lambda - 1)C_{\bar{F}(1)} + \lambda(\lambda - 1)C_{\bar{F}(2)} + (\lambda - 1)(C_{\bar{F}(1)} - C_{\bar{F}(3)}) \quad (21)$$

Обозначим через  $\bar{F}_1(\bar{s})$  функцию, имеющую изображение  $\bar{F}_1(\lambda) = (\lambda - 1)\bar{F}(\lambda)$ . Очевидно, что  $\bar{F}_1(\bar{s})$  также является частным решением неоднородного дифференциального уравнения

$$(\alpha^4 - \alpha^2)\bar{F}_1(\bar{s}) = \frac{q}{\delta(1+\nu)} \quad (22)$$

Разделив обе части уравнения (21) на  $\lambda^4 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 1)$ , получим для  $\bar{F}_1(\lambda)$  следующее уравнение

$$\bar{F}_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2(\lambda^2-1)} \frac{q}{\delta(1+\nu)} + \frac{1}{\lambda+1} C_{\bar{F}(1)} + \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} C_{\bar{F}(2)} + \frac{1}{\lambda^2(\lambda+1)} (C_{\bar{F}(1)} - C_{\bar{F}(3)}) \quad (23)$$

Разлагая рациональные дроби в (23) по методу неопределенных коэффициентов находим

$$\bar{F}_1(\lambda) = \frac{q}{\delta(1+\nu)} \left( -\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lambda-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lambda+1} \right) + \frac{1}{\lambda+1} C_{\bar{F}(1)} + \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda+1} \right) C_{\bar{F}(2)} +$$

$$+ \left( -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda+1} \right) \cdot (C_{\bar{F}(1)} - C_{\bar{F}(3)})$$

или после приведения подобных членов

$$\bar{F}_1(\lambda) = (C_{\bar{F}(2)} + C_{\bar{F}(3)} - C_{\bar{F}(1)}) \cdot \frac{1}{\lambda} + \left( C_{\bar{F}(1)} - C_{\bar{F}(3)} - \frac{q}{\delta(1+\nu)} \right) \cdot \frac{1}{\lambda^2} +$$

$$+ \frac{q}{2\delta(1+\nu)} \cdot \frac{1}{\lambda-1} + \left( C_{\bar{F}(1)} - C_{\bar{F}(2)} - C_{\bar{F}(3)} - \frac{q}{\delta(1+\nu)} \right) \cdot \frac{1}{\lambda+1},$$

что соответствует оригиналу

$$\bar{F}_1(\bar{s}) = (C_{\bar{F}(2)} + C_{\bar{F}(3)} - C_{\bar{F}(1)}) + \left( C_{\bar{F}(1)} - C_{\bar{F}(3)} - \frac{q}{\delta(1+\nu)} \right) \cdot \bar{s} +$$

$$+ \frac{q}{2\delta(1+\nu)} \cdot e^{\bar{s}} + \left( C_{\bar{F}(1)} - C_{\bar{F}(2)} - C_{\bar{F}(3)} - \frac{q}{\delta(1+\nu)} \right) \cdot e^{-\bar{s}} \quad (24)$$

В качестве частного решения неоднородного дифференциального уравнения (22) целесообразно принять функцию  $F_1(\bar{s})$ , в которой, в отличие от функции  $\bar{F}(\bar{s})$ , определяемой формулой (20), отсутствует слагаемое с  $\bar{s}e^{\bar{s}}$ , которое затрудняет получение в элементарных функциях расчетных формул для перемещений, напряжений и деформаций.

Общее решение  $\bar{F}_0(\bar{s})$  однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (22) и (17):

$$(\alpha^4 - \alpha^2)\bar{F}(\bar{s}) = 0, \quad (25)$$

представляется в виде

$$\bar{F}_0(\bar{s}) = \tilde{C}_1 \cdot 1 + \tilde{C}_2 \bar{s} + \tilde{C}_3 e^{\bar{s}} + \tilde{C}_4 e^{-\bar{s}} \quad (26)$$

где  $1, \tilde{s}, e^{\tilde{s}}, e^{-\tilde{s}}$  – линейно независимые решения однородного уравнения и  $\tilde{C}_i (i = 1, 2, 3, 4)$  – произвольные вещественные числа.

Обозначим через  $\hat{C}_i (i = 1, 2, 3, 4)$  – произвольные вещественные числа, связанные с коэффициентами  $\tilde{C}_i$  из (26) равенствами

$$\begin{aligned} \hat{C}_1 &= \tilde{C}_1 + C_{\tilde{F}^{(2)}} - C_{\tilde{F}^{(3)}} - C_{\tilde{F}^{(1)}}, \\ \hat{C}_2 &= \tilde{C}_2 + C_{\tilde{F}^{(1)}} - C_{\tilde{F}^{(3)}}, \\ \hat{C}_3 &= \tilde{C}_3 + C_{\tilde{F}^{(1)}}, \\ \hat{C}_4 &= \tilde{C}_4 + C_{\tilde{F}^{(1)}} - C_{\tilde{F}^{(2)}} - C_{\tilde{F}^{(3)}} \end{aligned} \quad (27)$$

Вследствие произвольности величин  $\tilde{C}_i$  произвольны и величины  $\hat{C}_i (i = \overline{1, 4})$ . За решающую функцию  $F(\tilde{s})$  примем общее (general) решение неоднородного уравнения (22), равное сумме общего решения  $\tilde{F}_0(\tilde{s})$  однородного уравнения (25) и частного решения  $\tilde{F}_1(\tilde{s})$  неоднородного уравнения (22):

$$\tilde{F}(\tilde{s}) = \tilde{F}_0(\tilde{s}) + \tilde{F}_1(\tilde{s}) = C_1 + C_2 \tilde{s} + C_3 e^{\tilde{s}} + C_4 e^{-\tilde{s}}, \quad (28)$$

где

$$C_1 = \hat{C}_1, C_2 = \hat{C}_2 - \frac{q}{\delta(1+\nu)}, C_3 = \hat{C}_3 + \frac{q}{\delta(1+\nu)}, C_4 = \hat{C}_4 - \frac{q}{\delta(1+\nu)} \quad (29)$$

С учетом выражений (7) для коэффициентов  $L_{UR}(\alpha, \varphi)$  и  $L_{RR}(\alpha, \varphi)$ , согласно формуле (8) для  $V_0(s)$  и представлению (28) для  $\tilde{F}(\tilde{s})$ , получим:

$$\tilde{V}_0(\tilde{s}) = [L_{RR}(\alpha, \varphi_a) - 2(1 + \nu)\alpha\alpha^2 L_{UR}(\alpha, \varphi_a)](C_1 + C_2 \tilde{s} + C_3 e^{\tilde{s}} + C_4 e^{-\tilde{s}}). \quad (30)$$

Выражения  $L_{RR}(\alpha, \varphi_a)$  и  $L_{UR}(\alpha, \varphi_a)$  после простых преобразований принимают вид

$$L_{RR}(\alpha, \varphi_a) = \cos \varphi_a \cdot \cos \alpha \varphi_a + \frac{1}{2}[(\nu - 1) - (1 + \nu)\alpha] \sin \varphi_a \cdot \sin \alpha \varphi_a \quad (31)$$

$$L_{UR}(\alpha, \varphi_a) = \frac{1}{4\alpha} [\alpha \sin \varphi_a \cdot \cos(\alpha \varphi_a)(1 + \nu) + \cos \varphi_a \sin(\alpha \varphi_a)(3 - \nu)]$$

Коэффициенты в (30) вычисляются на основе выражения (8) для  $V_0(s)$

$$\tilde{V}_0(\tilde{s}) = K_{V_0}(\alpha, \varphi_a) \cdot (C_1 + C_2 \tilde{s} + C_3 e^{\tilde{s}} + C_4 e^{-\tilde{s}}) \quad (32)$$

где

$$K_{V_0}(\alpha, \varphi_a) = L_{RR}(\alpha, \varphi_a) - 2(1 + \nu)\alpha\alpha^2 \cdot L_{UR}(\alpha, \varphi_a)$$

При расчете результатов действия операторов  $\cos(1 + \alpha)\varphi_a$ ;  $\cos(1 - \alpha)\varphi_a$ ;  $\sin(1 + \alpha)\varphi_a$ ;  $\sin(1 - \alpha)\varphi_a$ , входящих в выражения (8) для функций  $V_0(s)$  и  $R_0(s)$ , удобно предварительно представить их в виде  $\cos(\varphi_a + \alpha\varphi_a)$ ,  $\cos(\varphi_a - \alpha\varphi_a)$ ,  $\sin(\varphi_a + \alpha\varphi_a)$ ,  $\sin(\varphi_a - \alpha\varphi_a)$  с помощью известных тригонометрических соотношений

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_a + \alpha\varphi_a) &= \cos \varphi_a \cdot \cos(\alpha\varphi_a) - \sin \varphi_a \cdot \sin(\alpha\varphi_a), \\ \cos(\varphi_a - \alpha\varphi_a) &= \cos \varphi_a \cdot \cos(\alpha\varphi_a) + \sin \varphi_a \cdot \sin(\alpha\varphi_a) \\ \sin(\varphi_a + \alpha\varphi_a) &= \sin \varphi_a \cdot \cos(\alpha\varphi_a) + \cos \varphi_a \cdot \sin(\alpha\varphi_a) \\ \sin(\varphi_a - \alpha\varphi_a) &= \sin \varphi_a \cdot \cos(\alpha\varphi_a) - \cos \varphi_a \cdot \sin(\alpha\varphi_a) \end{aligned} \quad (33)$$

и воспользоваться формальными разложениями функций  $\cos \alpha\varphi_a$  и  $\sin \alpha\varphi_a$  в степенные ряды от параметра  $\alpha\varphi_a$ :

$$\begin{aligned} \sin(\alpha\varphi) &= \frac{\alpha\varphi}{1!} - \frac{(\alpha\varphi)^3}{3!} + \frac{(\alpha\varphi)^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{k+1}(\alpha\varphi)^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots \\ \cos(\alpha\varphi) &= 1 - \frac{(\alpha\varphi)^2}{2!} + \frac{(\alpha\varphi)^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{k+1}(\alpha\varphi)^{2k}}{2k!} + \dots \end{aligned} \quad (34)$$

Откуда получаем следующие соотношения:

$$\cos(\alpha\varphi) [1] = 1, \sin(\alpha\varphi)[1]=0; \cos(\alpha\varphi) [\tilde{s}] = \tilde{s}, \sin(\alpha\varphi)[\tilde{s}]=\varphi; \cos(\alpha\varphi) [e^{\tilde{s}}] = \cos\varphi(e^{\tilde{s}}),$$

$$\sin(\alpha\varphi)[e^{\tilde{s}}]=\sin\varphi(e^{\tilde{s}}); \cos(\alpha\varphi) [e^{-\tilde{s}}] = \cos\varphi(e^{-\tilde{s}}), \sin(\alpha\varphi)[e^{-\tilde{s}}]=-\sin\varphi(e^{-\tilde{s}}) \quad (35)$$

Имеем

$$K_{V_0}(\alpha, \varphi_a)[C_1] = C_1 \cos \varphi_a; K_{V_0}(\alpha, \varphi_a)[C_2\tilde{s}] = C_2 \left( \cos \varphi_a + \frac{1}{2} \varphi_a (\nu - 1) \sin \varphi_a \right);$$

$$K_{V_0}(\alpha, \varphi_a)[C_3 e^{\tilde{s}}] = [1 - (1 + \nu)a \sin 2\varphi_a] C_3 e^{\tilde{s}};$$

$$K_{V_0}(\alpha, \varphi_a)[C_4 e^{-\tilde{s}}] = \frac{1}{2} \{1 - \nu(1 + \nu)(\cos 2\varphi_a - 2a \sin 2\varphi_a)\} C_4 e^{-\tilde{s}}$$

Откуда следует

$$C_1^{\tilde{V}_0} = C_1 \cdot \cos \varphi_a + \frac{C_2}{2} (\nu - 1) \varphi_a \cdot \sin \varphi_a; C_2^{\tilde{V}_0} = C_2 \cdot \cos \varphi_a; C_3^{\tilde{V}_0} = C_3 [1 - (1 + \nu)a \sin 2\varphi_a];$$

$$C_4^{\tilde{V}_0} = \frac{C_4}{2} [1 - \nu(1 + \nu)(\cos 2\varphi_a - 2a \sin 2\varphi_a)] \quad (36)$$

Следовательно

$$\tilde{V}_0(\tilde{s}) = C_1^{\tilde{V}_0} + C_2^{\tilde{V}_0} \cdot \tilde{s} + C_3^{\tilde{V}_0} \cdot e^{\tilde{s}} + C_4^{\tilde{V}_0} \cdot e^{-\tilde{s}} \quad (37)$$

где  $C_i^{\tilde{V}_0}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) определяются по формулам (36).

Аналогично вычисляются коэффициенты в выражении

$$\tilde{R}_0(\tilde{s}) = C_1^{\tilde{R}_0} + C_2^{\tilde{R}_0} \cdot \tilde{s} + C_3^{\tilde{R}_0} \cdot e^{\tilde{s}} + C_4^{\tilde{R}_0} \cdot e^{-\tilde{s}} \quad (38)$$

Упростим выражения дифференциальных операторов  $L_{RV}(\alpha, \varphi_a)$  и  $L_{UV}(\alpha, \varphi_a)$  входящих в выражение (8) для  $R_0(s)$ :

$$L_{RV}(\alpha, \varphi_a) = -(1 + \nu) \sin \varphi_a \cdot \alpha(1 - \alpha) \sin \alpha \varphi_a$$

$$L_{UV}(\alpha, \varphi_a) = \frac{1}{2} \{ (2 - (1 + \nu)\alpha) \cdot \sin \varphi_a \cdot \cos \alpha \varphi_a + (\nu - 1) \cos \varphi_a \sin \alpha \varphi_a \}$$

$$R_0(s) = K_{V_0}(\alpha, \varphi_a) (C_1^{\tilde{R}_0} + C_2^{\tilde{R}_0} \cdot s + C_3^{\tilde{R}_0} \cdot e^s + C_4^{\tilde{R}_0} \cdot e^{-s}) \quad (39)$$

$$K_{R_0}(\alpha, \varphi_a) = (1 + \nu) \sin \varphi_a \cdot \alpha(1 - \alpha) \sin \alpha \varphi_a + (1 + \nu) a \alpha^2 \times$$

$$\times \{ (2 - (1 + \nu)\alpha) \cdot \sin \varphi_a \cdot \cos \alpha \varphi_a + (\nu - 1) \cos \varphi_a \sin \alpha \varphi_a \}$$

Имеем

$$K_{R_0}(\alpha, \varphi_a)[C_1] = 0; K_{R_0}(\alpha, \varphi_a)[C_2\tilde{s}] = 0; K_{R_0}(\alpha, \varphi_a)[C_3 e^{\tilde{s}}] = 0$$

$$K_{R_0}(\alpha, \varphi_a)[C_4 e^{-\tilde{s}}] = C_4 e^{-\tilde{s}} (1 + \nu) (1 - \cos 2\varphi_a - 2a \sin 2\varphi_a)$$

Откуда следует

$$C_1^{\tilde{R}_0} = C_2^{\tilde{R}_0} = C_3^{\tilde{R}_0} = 0; C_4^{\tilde{R}_0} = C_4 (1 + \nu) (1 - \cos 2\varphi_a - 2a \sin 2\varphi_a) \quad (40)$$

Следовательно

$$\tilde{R}_0(\tilde{s}) = C_4^{\tilde{R}_0} \cdot e^{-\tilde{s}} \quad (41)$$

где  $C_4^{\tilde{R}_0}$  определяется по формуле (40).

По определению,

$$U(r, \varphi) = Gu(r, \varphi), V(r, \varphi) = Gv(r, \varphi), \sigma_1(r, \varphi) = r\sigma_r, \Phi = r\sigma_\varphi, R = r\tau_{r\varphi}, \quad (42)$$

Вычислим функции из левых частей (42), используя их выражения из [11]:

$$\left. \begin{aligned} U(s, \varphi) &= L_{UU}(\alpha, \varphi)U_0(s) + L_{UV}(\alpha, \varphi)V_0(s) + L_{U\phi}(\alpha, \varphi)\Phi_0(s) + L_{UR}(\alpha, \varphi)R_0(s) \\ V(s, \varphi) &= L_{VU}(\alpha, \varphi)U_0(s) + L_{VV}(\alpha, \varphi)V_0(s) + L_{V\phi}(\alpha, \varphi)\Phi_0(s) + L_{VR}(\alpha, \varphi)R_0(s) \\ R(s, \varphi) &= L_{RU}(\alpha, \varphi)U_0(s) + L_{RV}(\alpha, \varphi)V_0(s) + L_{R\phi}(\alpha, \varphi)\Phi_0(s) + L_{RR}(\alpha, \varphi)R_0(s) \\ \sigma_1(s, \varphi) &= A_U(\alpha, \varphi)U_0(s) + A_V(\alpha, \varphi)V_0(s) + A_\phi(\alpha, \varphi)\Phi_0(s) + A_R(\alpha, \varphi)R_0(s) \\ \Phi(s, \varphi) &= L_{\phi U}(\alpha, \varphi)U_0(s) + L_{\phi V}(\alpha, \varphi)V_0(s) + L_{\phi\phi}(\alpha, \varphi)\Phi_0(s) + L_{\phi R}(\alpha, \varphi)R_0(s) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Коэффициенты  $L_{UV}(\alpha, \varphi)$ ,  $L_{UR}(\alpha, \varphi)$ ,  $L_{RV}(\alpha, \varphi)$ ,  $L_{RR}(\alpha, \varphi)$ ,  $L_{\phi U}(\alpha, \varphi)$  и  $L_{\phi R}(\alpha, \varphi)$  задаются формулами (7), а остальные используемые ниже коэффициенты в (43) определяются выражениями [11]:

$$\begin{aligned} L_{UU}(\alpha, \varphi) &= \frac{1}{4}\{(1+\nu)(1+\alpha)\cos(1+\alpha)\varphi - [(1+\nu)\alpha - 3 + \nu]\cos(1-\alpha)\varphi\}; \\ L_{VU}(\alpha, \varphi) &= \frac{1}{4}\{-(1+\nu)(1+\alpha)\sin(1+\alpha)\varphi - [3-\nu + (1+\nu)\alpha]\sin(1-\alpha)\varphi\}; \\ L_{VV}(\alpha, \varphi) &= \frac{1}{4}\{(1+\nu)(1-\alpha)\cos(1+\alpha)\varphi + [3-\nu + (1+\nu)\alpha]\cos(1-\alpha)\varphi\}; \\ L_{VR}(\alpha, \varphi) &= \frac{1}{8\alpha}[3-\alpha + (1+\nu)\alpha][\cos(1+\alpha)\varphi - \cos(1-\alpha)\varphi]; \\ L_{RU}(\alpha, \varphi) &= \frac{1}{2}\{(1+\alpha)\sin(1+\alpha)\varphi + (1-\alpha)\sin(1-\alpha)\varphi\}; \\ L_{\phi V}(\alpha, \varphi) &= \frac{1}{2}(1+\nu)\alpha[-(1-\alpha)\sin(1+\alpha)\varphi + (1+\alpha)\sin(1-\alpha)\varphi]; \\ L_{\phi U}(\alpha, \varphi) &= \frac{1}{2}(1+\nu)2(1+\alpha)[\cos(1-\alpha)\varphi - \cos(1+\alpha)\varphi]; \\ A_U(\alpha, \varphi) &= \frac{1}{2}(1+\nu)\alpha[(1+\alpha)\cos(1+\alpha)\varphi + (1-\alpha)\cos(1-\alpha)\varphi]; \\ L_{\phi R}(\alpha, \varphi) &= \frac{1}{4}\{-[3-\nu + (1+\nu)\alpha]\sin(1+\alpha)\varphi - (1+\nu)(1+\alpha)\sin(1-\alpha)\varphi\}; \\ A_V(\alpha, \varphi) &= \frac{1}{2}(1+\nu)\alpha[(1-\alpha)\sin(1+\alpha)\varphi + (3-\alpha)\sin(1-\alpha)\varphi]; \\ A_R(\alpha, \varphi) &= \frac{1}{4}\{[3-\nu + (1+\nu)\alpha]\sin(1+\alpha)\varphi - (1+\nu)(3-\alpha)\sin(1-\alpha)\varphi\} \end{aligned} \quad (44)$$

Перейдем в формулах (43) к новой переменной  $\tilde{s} = s - s_0$  и подставим в них согласно (11)  $\widetilde{U}_0(\tilde{s}) = 0$ ,  $\widetilde{\Phi}_0(\tilde{s}) = 0$  и выражения (37) и (41) для  $\widetilde{V}_0(\tilde{s})$  и  $\widetilde{R}_0(\tilde{s})$ . Принимая во внимание обозначения (42), с учётом равенства  $E = 2(1+\nu)G$  получим следующие расчетные формулы для перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned} Eu &= 2(1+\nu)\left\{C_1^{\widetilde{V}_0}\sin\varphi + \frac{1}{2}C_2^{\widetilde{V}_0}[2\ln\tilde{r}\cdot\sin\varphi - (1+\nu)\sin\varphi - (1-\nu)\varphi\cos\varphi] + \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(1+\frac{\nu}{4}\right)C_4^{\widetilde{V}_0} + \frac{1}{2}C_4^{\widetilde{R}_0}\right]\sin 2\varphi\frac{1}{\tilde{r}}\right\}; \\ Ev &= 2(1+\nu)\left\{C_1^{\widetilde{V}_0}\cos\varphi + C_2^{\widetilde{V}_0}\left(\ln\tilde{r}\cdot\cos\varphi + \frac{1-\nu}{2}\varphi\cdot\sin\varphi\right) + C_3^{\widetilde{V}_0}\cdot\tilde{r} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{C_4^{\widetilde{V}_0}}{2}(1+\cos 2\varphi) + \frac{C_4^{\widetilde{R}_0}}{4}(1-\nu)(1-\cos 2\varphi)\right]\cdot\frac{1}{\tilde{r}}\right\}; \\ \sigma_r &= 2(1+\nu)C_2^{\widetilde{V}_0}\frac{\sin\varphi}{\tilde{r}} - (1+\nu)C_4^{\widetilde{V}_0}\sin 2\varphi\frac{1}{\tilde{r}^2}; \\ \sigma_\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (45)$$

$$\tau_{r\varphi} = \left\{ C_4^{\bar{V}_0} (1 + \nu) (\cos 2\varphi - 1) + \frac{C_4^{\bar{R}_0}}{2} [1 - \nu + (1 + \nu) \cos 2\varphi] \right\} \cdot \frac{1}{\bar{r}^2}$$

Здесь  $u$  и  $v$  перемещения точки клина с полярными координатами  $(r, \varphi)$  соответственно по направлению радиуса и перпендикулярно к нему;  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi}$  – нормальное, тангенциальное и касательное напряжения, соответственно. Постоянные  $C_i^{\bar{V}_0}$  ( $i = \overline{1,4}$ ) и  $C_4^{\bar{R}_0}$  выражаются с помощью формул (36) и (40) через коэффициенты  $C_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) разрешающей функции (28). В свою очередь,  $C_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) выражаются по формулам (29) через коэффициенты  $\tilde{C}_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) и зависят от нагрузки  $q$  и параметров  $\delta, \nu$ .

Для получения элементарных решений (т.е. решений, выраженных в элементарных функциях) в задаче  $A_{\bar{q}}$  нами было принято в расчетах

$$\widehat{C}_1 = 0, \widehat{C}_2 = 3 \cdot \frac{q}{\delta(1+\nu)}, \widehat{C}_3 = 0, \widehat{C}_4 = \frac{q}{\delta(1+\nu)} \quad (46)$$

Тогда согласно (29) для задачи  $A_{\bar{q}}$  получим

$$C_1 = 0, C_2 = 2 \frac{q}{\delta(1+\nu)}, C_3 = \frac{1}{2} \frac{q}{\delta(1+\nu)}, C_4 = \frac{1}{2} \frac{q}{\delta(1+\nu)} \quad (47)$$

В случае плоской задачи в полярных координатах формулы для деформаций получаются из (известных в курсе по сопротивлению материалов) зависимостей между деформациями  $\varepsilon_{\bar{r}}, \varepsilon_\varphi, \gamma_{\bar{r}\varphi}$  и перемещениями  $u$  и  $v$  [18]:

$$\varepsilon_{\bar{r}} = \frac{\partial u}{\partial r}, \varepsilon_\varphi = \frac{1}{\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \gamma_{\bar{r}\varphi} = \frac{\tau_{\bar{r}\varphi}}{G} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \bar{r}} - \frac{v}{\bar{r}} \quad (48)$$

Для расчета зависимостей напряжений и деформаций от независимых переменных  $\bar{r}$  ( $\bar{r} = r/r_{min}$ ) и  $\varphi$  введем дискретные переменные  $\bar{r}[k] = (r[0] + k \cdot \Delta r / r[0])$ ,  $r[0] = r_{min}$ ,  $\Delta r = (r_{max} - r_{min}) / n_r$ ,  $k = 1, \dots, n_r$  ( $n_r$ - общее число переменных  $\bar{r}[k]$ ) и переменные  $\varphi[j] = \varphi[0] + j\Delta\varphi$ ,  $\varphi[0] = \varphi_{min} = -\varphi_a$ ,  $\Delta\varphi = (\varphi_{max} - \varphi_{min}) / n_\varphi$ ,  $\varphi_{max} = \varphi_a$ ,  $\varphi_{min} = -\varphi_a$ ,  $j = 1, \dots, n_\varphi$  ( $n_\varphi$ - общее число переменных  $\varphi[j]$ ); через  $i$  обозначен индекс  $i = (k - 1) \cdot n_\varphi + j$ , ( $k = 1, \dots, n_r$ ;  $j = 1, \dots, n_\varphi$ ;  $i = 1, \dots, n$ ;  $n = n_r \cdot n_\varphi$ ).

С учетом формул (45) по соотношениям (48) получим следующие расчетные формулы для деформаций при  $i = 1, \dots, n$ :

$$\varepsilon_{\bar{r}}[i] = \frac{2}{E} (1 + \nu) \left\{ C_2^{\bar{V}_0} \cdot \frac{\sin\varphi[j]}{\bar{r}[k]} - \frac{(1+\nu)}{4} \cdot C_4^{\bar{V}_0} \cdot \frac{\sin 2\varphi[j]}{\bar{r}^2[k]} \right\},$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi[i] &= \frac{1}{\bar{r}[k]} + \frac{2(1 + \nu)}{E\bar{r}[k]} \left\{ -C_1^{\bar{V}_0} \cdot \sin\varphi[j] + \right. \\ &+ C_2^{\bar{V}_0} [-(\ln\bar{r}[k])\sin\varphi[j]] + \frac{(1 - \nu)}{2} (\sin\varphi[j] + \varphi[j] \cdot \cos\varphi[j]) \left. \right\} + \\ &+ \left[ -C_4^{\bar{V}_0} + \frac{1-\nu}{2} C_4^{\bar{R}_0} \right] \cdot \frac{\sin 2\varphi[j]}{\bar{r}[k]}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{r\varphi} &= \frac{2(1+\nu)}{E\bar{r}[k]} \left\{ C_1^{\bar{V}_0} \cdot \cos\varphi[j] + \frac{C_2^{\bar{V}_0}}{2} [2\ln\bar{r}[k] \cdot \varphi[j] - (1 + \nu) \cdot \cos\varphi[j] - (1 - \nu)(\cos\varphi[j] - \right. \\ &\varphi[j] \cdot \sin\varphi[j])] + [2 \cdot (1 + \frac{\nu}{4}) C_4^{\bar{V}_0} + C_4^{\bar{R}_0}] \cos 2\varphi[j] \frac{1}{\bar{r}[k]} + \frac{2(1+\nu)}{E} \left\{ C_2^{\bar{V}_0} \frac{1}{\bar{r}[k]} \cos\varphi[j] + C_3 + \right. \\ &\left. + \left[ \frac{C_4^{\bar{V}_0}}{2} (1 + \cos 2\varphi[j]) + C_4^{\bar{R}_0} (1 - \nu)(1 - \cos 2\varphi[j]) \right] \cdot \left( -\frac{1}{\bar{r}^2[k]} \right) \right\} - \end{aligned}$$

$$-\frac{2(1+\nu)}{E\tilde{r}[k]} \left\{ C_4^{\bar{V}_0} \cos\varphi[j] + C_2^{\bar{V}_0} \left[ (\ln\tilde{r}[k] \cos\varphi[j] + \frac{1-\nu}{2} \varphi[j] \cdot \sin\varphi[j]) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[ \frac{C_4^{\bar{V}_0}}{2} (1 + \cos 2\varphi[j]) + \frac{C_4^{\bar{R}_0}}{4} (1 - \nu)(1 - \cos 2\varphi[j]) \right] \cdot \frac{1}{\tilde{r}[k]} \right\} \quad (49)$$

Из (45) получаем расчетные формулы для напряжений

$$\sigma_r[i] = 2(1+\nu) \left\{ C_2^{\bar{V}_0} \frac{\sin\varphi[j]}{\tilde{r}[k]} - \left( 1 + \frac{B}{2} \right) C_4^{\bar{V}_0} \frac{\sin 2\varphi[j]}{\tilde{r}^2[k]} \right\}; \\ \tau_{\tilde{r}\varphi} = \left\{ C_4^{\bar{V}_0} (1+\nu)(\cos 2\varphi[j] - 1) + \frac{C_4^{\bar{R}_0}}{2} [1 - \nu + (1+\nu)] \cos 2\varphi[j] \right\} \frac{1}{\tilde{r}^2[k]} \quad (50)$$

Рассмотрим далее обратно симметричную задачу  $A_{\bar{q}}$  при наличии изгиба клина сосредоточенной силой  $Q$  (рис.1), приложенной к его вершине (обозначим эту задачу через  $A_{\bar{q}Q}$ . Так как в этом случае касательное напряжение не возникает (для чего достаточно положить в (51)  $\hat{C}_4 = \frac{1}{2} \frac{q}{\delta(1+\nu)}$  и, следовательно,  $C_4 = 0$ ,  $C_4^{\bar{V}_0} = 0$ ,  $C_4^{\bar{R}_0} = 0$ ), постоянную  $C_2^{\bar{V}_0}$  можно определить из условия равновесия части клина, отсеченной цилиндрической поверхностью радиусом  $\tilde{r}$ :

$$Q - 2\delta \int_0^{\varphi_a} \sigma_r \sin\varphi \cdot \tilde{r} d\varphi - 2f_0 \tilde{r} \sigma_r^* \sin\varphi_a = 0 \quad (51)$$

С учетом выражения (45) для  $\sigma_r$ , соотношения (3) для  $\sigma_r^*$  и формулы  $a = \frac{E_1 f_0}{E\delta}$ , получим

$$Q - 2(1+\nu) C_2^{\bar{V}_0} \delta \int_0^{\varphi_a} \sin^2 \varphi d\varphi - 2a\delta C_2^{\bar{V}_0} \cdot \sin^2 \varphi_a = 0,$$

откуда находим

$$C_2^{\bar{V}_0} = \frac{Q}{2(1+\nu)\delta \left( \varphi_a - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_a + 2a \sin^2 \varphi_a \right)} \quad (52)$$

Напряжения в этом случае выражаются формулами

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\tilde{r}}(\tilde{r}, \varphi) &= \frac{Q}{\delta \left( \varphi_a - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_a + 2a \sin^2 \varphi_a \right)} \cdot \frac{\sin \varphi}{\tilde{r}} \\ \sigma_{\varphi} = \tau_{\tilde{r}\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Для расчета перемещений и напряжений по формуле (45) в случае задачи  $A_{\bar{q}Q}$  удобно положить

$$C_1 = 0, C_4 = 0, C_3 = \frac{1}{2} \frac{q}{\delta(1+\nu)}, \\ C_2 = \frac{1}{\cos \varphi_a} \frac{Q}{\delta \left( \varphi_a - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_a + 2a \sin^2 \varphi_a \right)}$$

Тогда  $C_1^{\bar{V}_0} = 0$  и  $C_4^{\bar{V}_0} = 0$

$$C_2^{\bar{V}_0} = \frac{Q}{2(1+\nu)\delta \left( \varphi_a - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_a + 2a \sin^2 \varphi_a \right)} \\ C_3^{\bar{V}_0} = C_3 [1 - (1+\nu)a \sin 2\varphi_a] \quad (54)$$

Расчетные формулы для напряжений в этом случае принимают вид:

$$\sigma_{\bar{r}}[i] = \frac{Q}{\delta\left(\varphi_a - \frac{1}{2}\sin 2\varphi_a + 2a\sin\varphi_a\right)} \cdot \frac{\sin\varphi[j]}{\bar{r}[k]} \quad (55)$$

Расчетные формулы для деформации имеют один и тот же вид (49).

Рассмотрим теперь обратно симметричную задачу  $A_{\bar{q}}$  совместно с изгибом подкрепленного клина посредством изгибающего момента  $M$ , приложенного к его вершине (обозначим эту задачу через  $A_{\bar{q}M}$ ). Условие равновесие для отсеченной части клина при наличии момента  $M$  и отсутствии силы  $Q$  ( $C_2^{\bar{V}_0} = 0$ ) имеет вид

$$M = 2\delta \int_0^{\varphi_a} \tau_{\bar{r}\varphi} \bar{r}^2 d\varphi \quad (56)$$

Положим

$$C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = \frac{1}{2} \frac{q}{\delta(1+\nu)}$$

Тогда из (36) находим

$$\begin{aligned} C_1^{\bar{V}_0} &= 0, C_2^{\bar{V}_0} = 0, C_3^{\bar{V}_0} = C_3[1 - (1 + \nu)a\sin 2\varphi_a] \\ C_4^{\bar{V}_0} &= \frac{1}{2} C_4[1 - \nu(1 + \nu)(\cos 2\varphi_a - 2a \cdot \sin 2\varphi_a)] \end{aligned} \quad (57)$$

Подставим в уравнение (56) выражение для  $\tau_{r\varphi}$  из (45) и учтем соотношения  $C_4^{\bar{R}_0} = BC_4^{\bar{V}_0}$ . Разрешая полученное уравнение относительно  $C_4^{\bar{V}_0}$ , находим

$$C_4^{\bar{V}_0} = \frac{M}{\delta\left\{[(1-\nu)B-2(1+\nu)]\varphi_a + (1+\nu)\left(1+\frac{B}{2}\right)\sin 2\varphi_a\right\}}$$

Расчетные формулы для напряжений принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\bar{r}} &= -(1 + \nu) \cdot \frac{M}{\delta\left\{[(1-\nu)B-2(1+\nu)]\varphi_a + (1+\nu)\left(1+\frac{B}{2}\right)\sin 2\varphi_a\right\}} \cdot \frac{\sin 2\varphi[j]}{\bar{r}^2[k]} \\ \tau_{\bar{r}\varphi} &= \frac{M(1+\nu)(\cos 2\varphi[j]-1) + \frac{B}{2}[1-\nu(1+\nu)\cos 2\varphi[j]]}{\delta\left\{[(1-\nu)B-2(1+\nu)]\varphi_a + (1+\nu)\left(1+\frac{B}{2}\right)\sin 2\varphi_a\right\}} \cdot \frac{1}{\bar{r}^2[k]} \\ \sigma_r[i] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

В обратной-симметричной задаче  $A_{\bar{p}}$  ( $q = 0, p \neq 0$ ) при дополнительном условии (11) начальные функции  $V_0(s)$  и  $R_0(s)$  определяются из второго уравнения (6) при  $q = 0$  по формулам

$$\begin{cases} V_0(s) = L_{\phi R}(\alpha, \varphi_a)F(s) \\ R_0(s) = -L_{\phi V}(\alpha, \varphi_a)F(s) \end{cases} \quad (59)$$

При этом в силу (59) при  $q=0$  выполняется второе уравнение в (6), а из уравнения (10) при дополнительном условии (11) (или, что то же, из первого уравнения в (6)) получается дифференциальное уравнение относительно разрешающей функции  $F(s)$ :

$$\begin{aligned} &-L_{\phi R}(\alpha, \varphi_a)[L_{RV}(\alpha, \varphi_a) - 2(1 + \nu)a\alpha^2 L_{UV}(\alpha, \varphi_a)] + \\ &+ L_{\phi V}(\alpha, \varphi_a)[L_{RR}(\varphi_a) - 2(1 + \nu)a\alpha^2 L_{UR}(\alpha, \varphi_a)]F(s) = -\frac{P}{2\delta e^s}; \end{aligned} \quad (60)$$

т.е. уравнение (12) с правой частью, равной  $(-\frac{p}{2\delta e^s})$ . Так что, по аналогии с задачей  $A_{\bar{q}}$  разрешающая функция  $F(s)$  имеет вид (28) с коэффициентами  $C_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ), определяемыми равенствами (29) с заменой  $q$  на  $-p$

$$C_1 = \hat{C}_1, C_2 = \hat{C}_2 + \frac{p}{\delta(1+\nu)}, C_3 = \hat{C}_3 - \frac{1}{2} \frac{p}{\delta(1+\nu)}, C_4 = \hat{C}_4 + \frac{1}{2} \frac{p}{\delta(1+\nu)}, \quad (61)$$

получаемыми из (29) заменой  $q$  на  $(-p)$ . Все остальные формулы (30)-(58) остаются без изменения, если в них заменить  $q$  на  $(-p)$ .

### Численная реализация расчетных формул и обсуждение результатов

Для численной реализации решений обратно симметричных задач были использованы следующие исходные данные:

$E = 2,1 \cdot 10^{10}$  [кг/м<sup>2</sup>],  $E_1 = 0,17 \cdot 10^{10}$  [кг/м<sup>2</sup>], ( $E$  и  $E_1$  – модули упругости стали и свинца),  $\nu = 0,26$ ,  $Q = 13,7 \cdot 10^3$  [Н],  $M = 82,2$  [Н·м],  $\delta = 6 \cdot 10^3$  [м] (толщина подкрепленной стенки по краям клина),  $\varphi_a = \frac{\pi}{6}$ ,  $r_{max} = 0,4 \cdot 10^{-2}$  [м],  $r_{min} = 0,1 \cdot 10^{-2}$  [м],  $r[0]=r_{min}$ ,  $\eta_\varphi = 10$ ,  $\eta_r = 10$ ,  $r[\eta_\varphi]=r_{max}$ ,  $\varphi[\eta_\varphi] = \varphi_a$ ,  $f_0 = 0,1$ ,  $p = 6 \cdot 10^2$  [Н],  $q = 12 \cdot 10^2$  [Н],  $\varphi_{max} = \varphi_a$ ,  $\varphi_{min} = \varphi_a$ ,  $\Delta r = \frac{r_{max}-r_{min}}{\eta_r}$ ,  $\Delta\varphi = \frac{2\varphi_a}{\eta_r}$ ,  $\tilde{r} = r/r[0]$ .

$\tilde{r}[k] = (r[0] + k \cdot \Delta r)/r[0]$ ,  $k = 1, \dots, \eta_r$ ;  $\varphi[j] = \varphi[0] + j\Delta\varphi$  ( $j = 1, \dots, \eta_\varphi$ ),  $i = (k-1) \cdot \eta_\varphi + j$ ,  $k = 1, \dots, \eta_r$  ( $j = 1, \dots, \eta_\varphi$ ).

Для задачи  $A_{\bar{q}}$ , с учетом формул (47) для коэффициентов  $C_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), на основании формул (50), определяющих выражения напряжений и формул (49) для деформаций, на рисунках 2-4 с помощью 2D-программы приведены диаграммы «напряжение-деформация»  $\sigma_{\tilde{r}}(\varepsilon_{\tilde{r}})$ ,  $\sigma_{\tilde{r}}(\varepsilon_\varphi)$  и  $\tau_{\tilde{r}\varphi}(\gamma_{\tilde{r}\varphi})$ , а на рисунке 5 с помощью 3D-программы диаграмма «напряжение-деформация»  $\sigma_{\tilde{r}}(\varepsilon_{\tilde{r}}, \varepsilon_\varphi)$ .

В книге Власова [11] для  $V_0(s)$  и  $R_0(s)$  приводятся следующие формулы

$$V_0(s) = C_1^{V_0} + C_2^{V_0} \cdot s + C_3^{V_0} \cdot e^s + C_4^{V_0} \cdot e^{-s} \quad (62)$$

$$R_0(s) = B \cdot e^{-s} \quad (63)$$

где

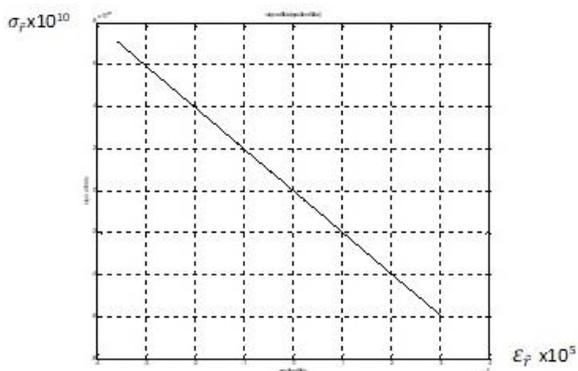
$$B = \frac{2(1+\nu)(1-\beta \cos 2\varphi_a)}{1-\nu+(1+\nu)\beta \cos 2\varphi_a}, \beta = 1 - 2a \cdot \operatorname{tg} 2\varphi_a \quad (64)$$

Согласно формулам (36) для  $C_4^{\tilde{V}_0}$  и (41) для  $C_4^{\tilde{R}_0}$ , в соответствии с формулой (8) для  $R_0(s)$  имеем  $C_4^{\tilde{R}_0} = BC_4^{\tilde{V}_0}$ ,  $C_4^{R_0} = BC_4^{V_0}$ . Следовательно, в рамках метода начальных функций имеем:

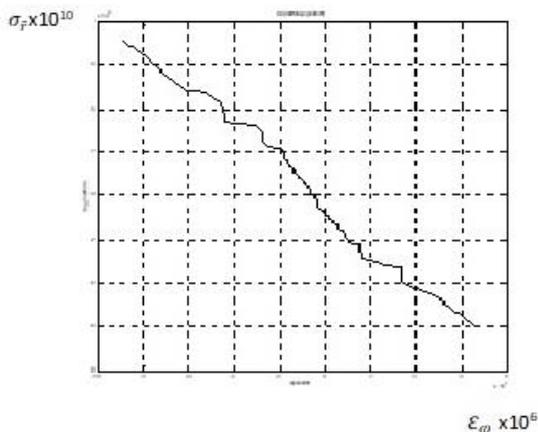
$$R_0(s) = BC_4^{V_0} \cdot e^{-s} \quad (65)$$

Так как  $V_0(s) = \tilde{V}_0(\tilde{s})|_{\tilde{s}=s-s_0}$  и  $R_0(s) = \tilde{R}_0(\tilde{s})|_{\tilde{s}=s-s_0}$ , то  $C_4^{\tilde{R}_0} = C_4^{R_0}$  и  $C_4^{\tilde{V}_0} = C_4^{V_0}$ , а следовательно, формула (63) для  $R_0(s)$  справедлива только при условии

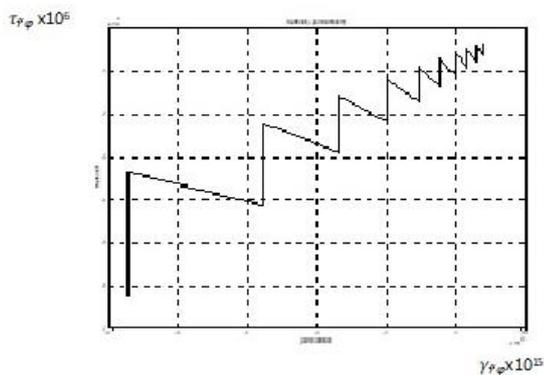
$$C_4^{V_0} = 1 \quad (66)$$



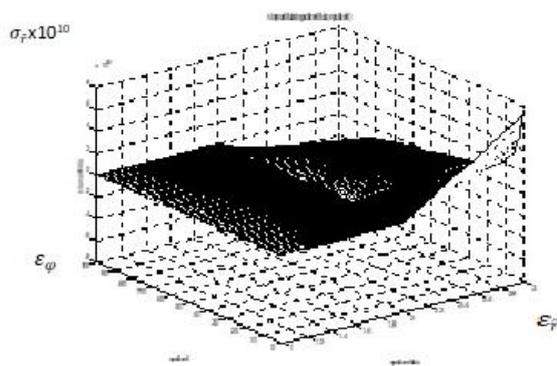
**Рисунок 2** – Зависимость нормального напряжения  $\sigma_r$  от деформации  $\varepsilon_r$  в задаче  $A_{\bar{q}}$   
**Figure 2** – Dependence of normal stress  $\sigma_r$  on strain  $\varepsilon_r$  in problem  $A_{\bar{q}}$



**Рисунок 3** – Зависимость нормального напряжения  $\sigma_r$  от деформации  $\varepsilon_\varphi$  в задаче  $A_{\bar{q}}$   
**Figure 3** – Dependence of normal stress  $\sigma_r$  on strain  $\varepsilon_\varphi$  in problem  $A_{\bar{q}}$



**Рисунок 4** – Зависимость касательного напряжения  $\tau_{r\varphi}$  от деформации  $\gamma_{r\varphi}$  в задаче  $A_{\bar{q}}$   
**Figure 4** – Dependence tangential stress  $\tau_{r\varphi}$  on strain  $\gamma_{r\varphi}$  in problem  $A_{\bar{q}}$



**Рисунок 5** – Зависимость нормального напряжения  $\sigma_r$  от деформации  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_\varphi$  в задаче  $A_{\bar{q}}$   
**Figure 5** – Dependence of normal stress  $\sigma_r$  on strain  $\varepsilon_r$  and  $\varepsilon_\varphi$  in problem  $A_{\bar{q}}$

В [11], согласно формулам (62) и (63), получены следующие расчетные формулы для перемещений и напряжений в задаче  $A_{\bar{q}}$

$$\left. \begin{aligned}
 Eu &= C_1^{V_0} \sin \varphi + \frac{1}{2} C_2^{V_0} [2 \ln r \cdot \sin \varphi - (1 + \nu) \sin \varphi - (1 - \nu) \varphi \cos \varphi] + 2C_4^{V_0} \frac{\sin 2\varphi}{r}; \\
 Ev &= C_1^{V_0} \cos \varphi + C_2^{V_0} \left( \ln r \cdot \cos \varphi + \frac{1-\nu}{2} \sin \varphi \right) + C_3^{V_0} r + \\
 &\quad + \frac{C_4^{V_0}}{r} [(1 + \nu) \beta \cos 2\varphi_a + (1 - \nu) \cos 2\varphi]; \\
 \sigma_r &= C_2^{V_0} \frac{\sin \varphi}{r} - 2C_4^{V_0} \frac{\sin 2\varphi}{r^2}; \\
 \sigma_\varphi &= 0; \\
 \tau_{r\varphi} &= \frac{C_4^{V_0}}{r^2} (\cos 2\varphi - \beta \cos 2\varphi_a).
 \end{aligned} \right\} (67)$$

В выражениях для  $E_u$  и  $E_u$  в формулах (67) не учитывается множитель  $2(1 + \nu)$  согласно равенству  $E = 2(1 + \nu)G$  между модулем Юнга  $E$  и модулем сдвига  $G$ . Далее, формулы (67) становятся неприменимыми при малых  $r$ , поскольку при  $r \rightarrow 0 \ln r \rightarrow -\infty$  и  $1/r \rightarrow \infty$ , в то время как формулы (45) применимы при  $r \rightarrow 0$ , поскольку в этом случае в качестве  $r_0 = r_{min}$  можно принять в расчетах бесконечно малую того же порядка что и величина  $r$  и, следовательно  $\tilde{r} \approx 1$ . К тому же, все коэффициенты  $C_i^{V_0}$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) в формулах (67) носят неопределенный характер и не показывают их зависимость от нагрузки по краям клина, что затрудняет применение этих формул на практике. Более того, задание  $R_0(s)$  в виде (63) приводит по методу начальных функций с учетом (42) к следующему выражению для касательного напряжения  $\tau_{r\varphi}$ :

$$\tau_{r\varphi} = \left\{ C_4^{V_0} (1 + \nu) (\cos 2\varphi - 1) + \frac{1}{2} B [1 - \nu + (1 - \nu) \cos 2\varphi] \right\} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad (68)$$

которое существенно расходится с соответствующими выражениями для  $\tau_{\tilde{r}\varphi}$  как в (45), так и в (67). Для задачи  $A_{\tilde{q}Q}$ , с учетом формул (54) для коэффициента  $C_4^{\tilde{V}_0}$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) и на основании формул (55) для напряжений и формул (49) для деформаций, на рис. 6-8 приведены диаграммы «напряжение-деформация»  $\sigma_{\tilde{r}}(\varepsilon_{\tilde{r}})$ ,  $\sigma_{\tilde{r}}(\varepsilon_{\varphi})$  и  $\tau_{\tilde{r}\varphi}(\gamma_{\tilde{r}\varphi})$  а на рисунке 9 – диаграмма «напряжение-деформация»  $\sigma_{\tilde{r}}(\varepsilon_{\tilde{r}}, \varepsilon_{\varphi})$ .

Формулы (55) для напряжений совпадают с соответствующими формулами из [11] (поскольку они не зависят от  $R_0$ ) и при

$a = 0$  и  $\delta = 1$  с формулами [16] и [18] (с точностью до знака (-) с учетом расположения силы  $Q$ ).

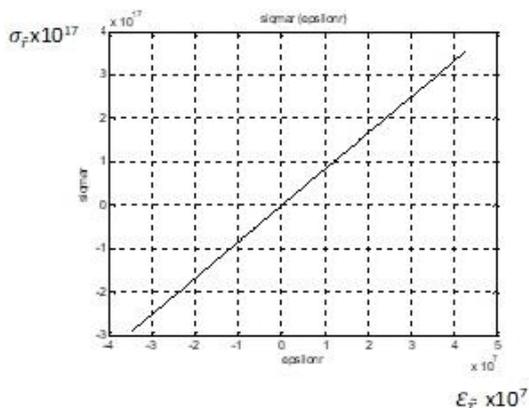
Для задачи  $A_{\tilde{q}M}$ , с учетом формул (57) для  $C_i^{\tilde{V}_0}$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) и на основании формул (58) для напряжений и формул (49) для деформаций на рис.10-12 приведены диаграммы «напряжение-деформация»  $\sigma_{\tilde{r}}(\varepsilon_{\tilde{r}})$ ,  $\sigma_{\tilde{r}}(\varepsilon_{\varphi})$  и  $\tau_{\tilde{r}\varphi}(\gamma_{\tilde{r}\varphi})$ , а на рисунке 9 – диаграмма «напряжение-деформация»  $\sigma_{\tilde{r}}(\varepsilon_{\tilde{r}}, \varepsilon_{\varphi})$ .

Необходимо отметить, что формулы для напряжений в задаче  $A_{\tilde{q}M}$ , приведенные в [11], некорректны из-за необоснованности в этой задаче формулы (63) для  $R_0(s)$ , поскольку используемая в этом случае формула для  $C_4^{V_0}$  [11].

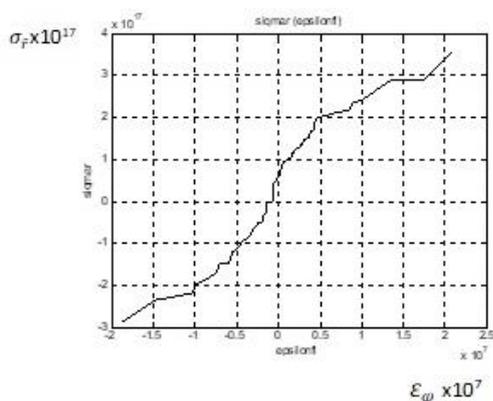
$$C_4^{V_0} = \frac{M}{2\delta \left( \frac{1}{2} \sin 2\varphi_a - \beta \cdot \varphi_a \cdot \cos 2\varphi_a \right)}$$

противоречит условию (66) для  $C_4^{V_0}$ , а формулы для напряжений в случае изгиба клина моментом  $M$ , приведенные в [16] и [18], справедливы только при отсутствии воздействия внешних объемных сил, которыми в частности являются нагрузки  $\frac{1}{2}q$  и  $\frac{1}{2}p$  по краям клина в обратно симметричных задачах  $A_{\tilde{q}M}$  и  $A_{\tilde{p}M}$ .

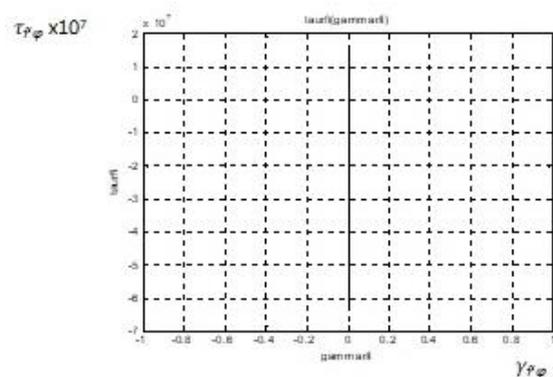
Полученные в работе формулы (58) для напряжений при изгибе клина моментом  $M$  являются обобщением соответствующих результатов из [16] и [18] на случай наличия нагрузок нагрузки  $\frac{1}{2}q$  и  $\frac{1}{2}p$  по подкрепленным или неподкрепленным краям клина.



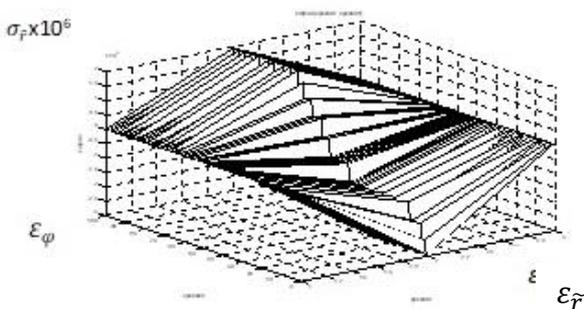
**Рисунок 6** – Зависимость нормального напряжения  $\sigma_r$  от деформации  $\epsilon_r$  в задаче  $A_{qQ}$   
**Figure 6** – Dependence of normal stress  $\sigma_r$  on strain  $\epsilon_r$  in problem  $A_{qQ}$



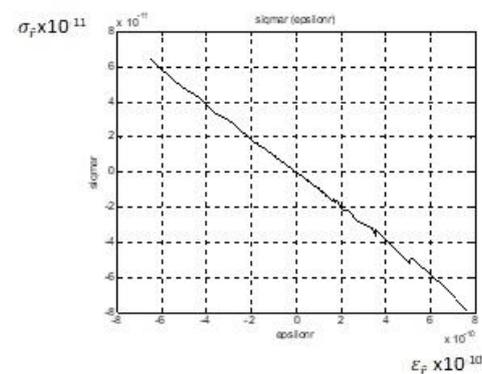
**Рисунок 7** – Зависимость нормального напряжения  $\sigma_r$  от деформации  $\epsilon_\phi$  в задаче  $A_{qQ}$   
**Figure 7** – Dependence of normal stress  $\sigma_r$  on strain  $\epsilon_\phi$  in problem  $A_{qQ}$



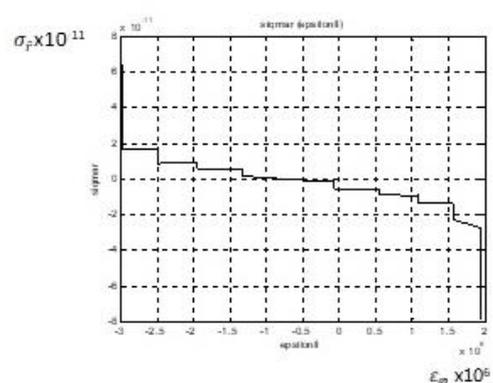
**Рисунок 8** – Зависимость касательного напряжения  $\tau_{r\phi}$  от деформации  $\gamma_{r\phi}$  в задаче  $A_{qQ}$   
**Figure 8** – Dependence of tangential stress  $\tau_{r\phi}$  on strain  $\gamma_{r\phi}$  in problem  $A_{qQ}$



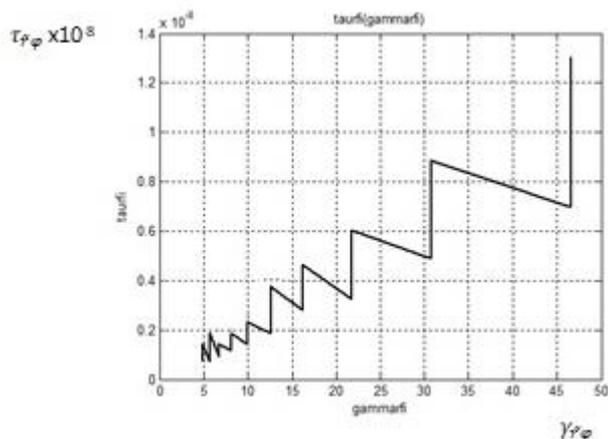
**Рисунок 9** – Зависимость нормального напряжения  $\sigma_r$  от деформации  $\epsilon_r$  и  $\epsilon_\phi$  в задаче  $A_{qQ}$   
**Figure 9** – Dependence of normal stress  $\sigma_r$  on strain  $\epsilon_r$  and  $\epsilon_\phi$  in problem  $A_{qQ}$



**Рисунок 10** – Зависимость нормального напряжения  $\sigma_r$  от деформации  $\epsilon_r$  в задаче  $A_{qM}$   
**Figure 10** – Dependence of normal stress  $\sigma_r$  on strain  $\epsilon_r$  in problem  $A_{qM}$



**Рисунок 11** – Зависимость нормального напряжения  $\sigma_r$  от деформации  $\epsilon_\phi$  в задаче  $A_{qM}$   
**Figure 11** – Dependence of normal stress  $\sigma_r$  on strain  $\epsilon_\phi$  in problem  $A_{qM}$

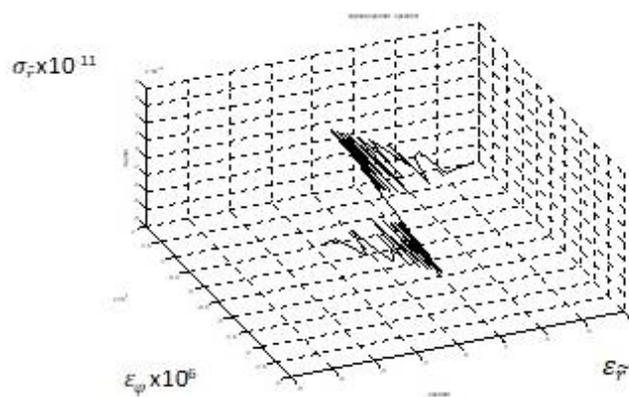


**Рисунок 12** – Зависимость касательного напряжения  $\tau_{\bar{r}\varphi}$  от деформации  $\gamma_{\bar{r}\varphi}$  в задаче  $A_{\bar{q}M}$

**Figure 12** – Dependence of tangential stress  $\tau_{\bar{r}\varphi}$  on strain  $\gamma_{\bar{r}\varphi}$  in problem  $A_{\bar{q}M}$

### Заклучение

Одностороннее нагружение прямоугольной и клиновидной пластин удобно представлять как сумму двух типов нагружения, одно из которых симметрично, другое обратно симметрично относительно продольной плоскости симметрии неподкрепленной или подкрепленной ребрами на краях пластины. Исходная задача  $A$  с одновременным заданием двух видов нагрузки (нормальной или касательной с постоянной интенсивностью  $\frac{1}{2}q$  и  $\frac{1}{2}p$ , соответственно) с помощью декомпозиционного подхода разбивается на подзадачи, каждая из которых зависит от одного вида нагрузки того или иного типа направленности по краям: симметричные задачи  $A_q$  и  $A_p$  и обратно симметричные задачи  $A_{\bar{q}}$  и  $A_{\bar{p}}$ . Для решения задач  $A_{\bar{q}}$  и  $A_{\bar{p}}$  используется метод начальных функций, представляющих собой фиксированные при  $\varphi = 0$  значения функций от полярных координат  $(r, \varphi)$ , которые зависят от оператора дифференцирования  $\alpha = \frac{d}{ds}$ ,  $s = \ln r$ . Согласно мето-



**Рисунок 13** – Зависимость нормального напряжения  $\sigma_{\bar{r}}$  от деформации  $\varepsilon_{\bar{r}}$  и  $\varepsilon_{\varphi}$  в задаче  $A_{\bar{q}M}$

**Figure 13** – Dependence of normal stress  $\sigma_{\bar{r}}$  on strain  $\varepsilon_{\bar{r}}$  and  $\varepsilon_{\varphi}$  in problem  $A_{\bar{q}M}$

ду начальных функций, решение задачи о напряженно-деформированном состоянии нагруженной пластины получается с помощью дифференциального уравнения бесконечно высокого порядка (вследствие использования тригонометрических функций от оператора дифференцирования  $\alpha$ ), сводящегося к обыкновенному неоднородному дифференциальному уравнению конечного порядка для разрешающей функции  $F(s)$ . Характеристическое уравнение имеет конечное число корней, на основе которых с применением операционного исчисления с изображением по Лапласу строится элементарное (в элементарных функциях) решение.

Для нагруженных по ребрам клиновидной пластины получены решения обратно симметричных задач  $A_{\bar{q}}, A_{\bar{p}}$  в отсутствии внешних сил,  $A_{\bar{q},Q}, A_{\bar{p},Q}$  с приложенной к вершине клина поперечной силы и  $A_{\bar{q},M}, A_{\bar{p},M}$  с воздействием изгибающего момента  $M$ . Полученные для этих задач выражения для перемещений  $u$  и  $v$  в

направлении радиуса и перпендикулярно к радиусу и напряжений (нормальных  $\sigma_q$ , тангенциальных  $\sigma_\varphi$  и касательных  $\tau_{r\varphi}$ ) являются уточнением с определением входящих произвольных констант соответствующих формул из [11] и обобщением расчетных формул из [16, 18] для напряжений и деформаций на случай нагруженной по краям клиновидной пластины. В применении к исследованию НДС зубьев плашки

внутрискважинного пакера произведены расчеты и построены диаграммы зависимостей напряжений от деформаций  $\sigma_r(\varepsilon_r)$ ,  $\sigma_\varphi(\varepsilon_\varphi)$ ,  $\tau_{r\varphi}(\gamma_{r\varphi})$  и  $\sigma_r(\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi)$ .

### Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов, связанных с публикацией данной статьи.

## REFERENCES

1. **Pobedrya B.Y., Georgiyevskiy D.M.** Leksii po teorii uprugosti – M.: Edutorial URSS, 1999. 208 s. (in Russian)
2. **Bezukhov N.İ., Lujin O.V.** Prilojenije metodov teorii uprugosti i plastichnosti k resheniyu injenernix zadach. Uchebnoye posobiye dlya vtuzov. – M.: *Visshaya shkola*. 1974. 204 s. (in Russian)
3. **Potapova L.B., Yartsev V.P.** Mekhanika materialov pri slojnom napryajonnom sostoyanii. Kak prognoziryuyut predelnye napryajeniya. – M.: *Mashinostroyeniye* – 1, 2005. - 340 s. (in Russian)
4. **Barashkov V.N., Smolina İ.Y., Puteyeva L.Y., Pestsov D.N.** Osnovi teorii uprugosti. Uchebnoye posobiye. – Tomsk: *İzdatelstvo Tomskogo Gosudarstvennogo Arkhitekturno-Stroitel'nogo Universiteta*, 2012. - 184 s. (in Russian)
5. **Bukhalenko Y.İ.** Spravochnik po neftepromislovomu oborudovaniyu – M.: *Nedra*, 1983. - 399 s. (in Russian)
6. **Janahmadov A. Kh.** Neftyanaya tribologiya. Baku: *Elm*, 2003. - 326 s. (in Russian)
7. **Molchanov G.V., Chepovetskiy A.V., Yaladdinov R.A.** İssledovaniye osnovnix kinemacheskikh kharakteristik klinovogo zakhvata / *Mashini i neftyanoye oborudovaniye*, 1982, №1, s.18-20. (in Russian)
8. **Janahmadov A.Kh.** Tribotekhnicheskiye problemi pri ekspluatatsii nefteqazopromislovoqo oborudovaniya // *Treniye i iznos*. T. 22, №1, 2001, s. 27-30. (in Russian)
9. **Mammadov V.T., Shahnazarov M.A.** Determination of the stress state and strength characteristics of the jaws teeth during the packers operation. / *International Journal Innovative Research in Multidisciplinary Field*, Vol.4, Issue 3, Mar.2018, pp. 75-81.
10. **İshenko İ.M., Selvashuk A.P.** O raspredelenii davleniy v klinovix zahkvatakh dlya tonkostennix trub. / *İzvestiya vuzov. Mashinostroyeniye*, 1974, №1, s. 34-38. (in Russian)
11. **Vlasov V.V.** Metod nachalnikh funktsiy v zadachakh uprugosti i stroitel'noy mekhaniki. – M.: *Stroyizdat*, 1975. – s 223. (in Russian)
12. **Maliyev A.S.** O vibore funktsiy v obshikh resheniyakh zadachi ravnovesiya izotropnogo uprugogo tela – M.: *Transjeldorizdat*, 1952, Vıpusk .4, s. 180-244. (in Russian)
13. **Vlasov V.Z., Leontyev N.N.** Balki, pliti i obolochki na uprugom osnovanii. – M.: *Gos. İzdatelstvo fiz.-mat. lit.*, 1960, s. 491. (in Russian)
14. **Yelpatyevskiy A.N., Zimakov N.N.** Metod nachalnikh funktsiy v ploskoy zadache teorii uprugosti dla tela s pryamolineynoy ortotropiye. / *İzv. AN SSSR. Mekhanika tvyordogo tela*, 1973, №1, s. 127-134. (in Russian)
15. **Matrosov A.V.** Skhodimost stepennix ryadov v metode nachalnikh funktsiy / *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta*. 2012. Vıpusk 1, s. 41-49. (in Russian)
16. **Bezukhov N.İ.** Osnovi teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti – M.: *Visshaya shkola*, 1968. s. 512. (in Russian)
17. **Ditkin V.A., Kuznetsov P.İ.** Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu. Osnovi teorii i tablitsı formul. Moskva-Leningrad, GİTTL, 1951, s. 255. (in Russian)
18. **Kiselyov V.A.** Ploskaya zadacha teorii uprugosti – M.: *Visshaya shkola*, 1978. s. 154. (in Russian)